Logique classique (et baroque)

31 août 2019

Introduction historique. Au XIXème, les mathématiques deviennent de plus en plus abstraites, et avec cette abstraction viennent des inquiétudes sur les contradictions et paradoxes logiques qui peuvent résulter de situations “pathologiques” :

- **En analyse réelle :** dans son *Cours d'Analyse*, Cauchy entreprend de prouver rigoureusement les théorèmes du calcul infinitésimal de Newton et Leibniz, en utilisant une notion de quantité convergeant vers 0. Cette approche sera complétée par Bolzano, qui formalisera cette notion de convergence, et à qui l'on doit les fameuses définitions en (ε, δ). Weierstass exhibe alors des exemples pathologiques de fonctions continues mais nulle part dérivables, poussant dans ses retranchement l'intuition de fonction continue comme un graphe “lisse, que l'on peut tracer d'un seul trait”. Il milite alors en faveur d'une axiomatisation de l'analyse.
- **En théorie des groupes :** Abel et Galois[1] ouvrent la voie à l'algèbre abstraite, basée sur des structures vérifiant certains axiomes, dans leur étude des solutions de polynômes. Ils montrent qu'il n'existe pas de solution générale pour les polynômes de degré plus grand que 4, et, en se basant sur leurs travaux, Lindemann prouve l'impossibilité de la quadrature du cercle à la règle et au compas tandis que Wantzel démontre l'impossibilité de la trisection d'un angle. Ces problèmes, en attente de résolution depuis l'antiquité, démontrent l'extraordinaire puissance de ce type de raisonnement, et inspirent le développement, entre autres, des espaces vectoriels, entraînant la géométrie dans les grandes dimensions et loin de l'intuition.
- **En géométrie :** Depuis l'Antiquité, parmi les axiomes d'Euclide, le cinquième, qui stipule qu'étant donné une droite D et un point p hors de cette droite, il existe une unique droite parallèle à D passant par p, gêne les géomètres, qui le trouvent moins "immédiat" que les autres (qui exigent des choses telles que "tous les angles droits sont égaux"). Dans les années 1820, après des siècles de tentatives pour le démontrer à partir des autres axiomes, Lobatchevski, Bolyai et Gauss mettent sur pied une géomérie cohérente, vérifiant les 4 premiers axiomes mais pas le 5ème : la géométrie hyperbolique, dans laquelle, par le point p passent en fait une inifnité de droites parallèles à D. Plus tard, Riemann introduit la géométrie elliptique, dans laquelle par le point p ne passe aucune droite parallèle à D.

Ainsi, au XIXème siècle, il est de bon ton pour un mathématicien de s'interroger sur les axiomes qui fondent son domaine. Et pourquoi pas, de chercher les fondements des maths en général. Avec le développement de la théorie des ensembles et l'axiomatisation de l'arithmétique par Péano, l'affaire semble en bonne voie, mais les systèmes proposés, notamment par Frege, semblaient envahis de paradoxes et de contradictions, comme celui de Russell. Les mathématiques sont alors rendues à un degré d'abstraction si stratosphérique qu'elles flirtent avec la philosophie, au point d'opposer trois écoles de pensées :

— Les Platonistes, pour qui les objets mathématiques existent réellement en dehors de la pensée humaine. L'objectif des mathématiques est alors de découvrir des vérités sur ces objets ; ceux-là, tels les elfes de la Lothlorien, vivent dans un monde enchanté où les automorphismes gambadent en liberté, et ne participent pas à la bataille entre...

1. qui, comme il sied à des rock stars, sont tous deux morts avant 27 ans.

— Les Formalistes, menés par Hilbert, ancrés des deux pieds dans l'esprit de leur temps : pour eux, les mathématiques consistent avant tout en la manipulation de symboles sans signification, en partant d'axiomes tout aussi symboliques et suivant certaines règles "de déduction" ;
— Enfin, les Intuitionnistes, menés par Brouwer et dont on reparlera plus loin, pour qui les mathématiques ne font sens que si on les restreint à des opérations concrètes sur des ensembles finis. La preuve, dès qu'on fait autrement, on tombe sur des paradoxes... Mais cette approche oblige à jeter, où au moins à reconsidérer avec suspicion, la plupart des avancées récentes.

Or, Hilbert (et il n'est pas le seul) tient à ces avancées et aux superbes édifices mentionnés plus haut. Pour les sauver des armées du chaos de Brouwer, il met au point un plan de bataille : battre les intuitionnistes à leur propre jeu. Pour ce faire, il s'agit de prouver, en utilisant des méthodes "finies" que les intuitionnistes devraient accepter, que les mathématiques classiques sont entièrement cohérentes. Il s'agit donc de trouver le bon système d'axiomes qui permet de récupérer des monuments de l'analyse et de la géométrie, en les fondant sur des bases inattaquables, débarrassées des contradictions qui les minent.

Pendant un moment, ce plan, qui suscite l'intérêt de nombreux mathématiciens, semble en bonne voie. C'est alors qu'intervient Gödel, qui démontre ses fameux théorèmes d'incomplétude : premièrement, *il existe, dans tout système formel, une phrase vraie qu'on ne peut démontrer*, et deuxièmement, *aucun système cohérent d'axiomes ne peut prouver sa propre cohérence*. Ainsi, le projet de Hilbert est voué à l'échec [2].

Cependant, les mathématiques ont survécu à l'effondrement des défenses de Hilbert. Simplement, il leur a fallu descendre de leur piédestal de vérité absolue et immaculée. En se basant sur une axiomatisation de la théorie des ensembles (la plus populaire étant ZFC, pour Zermelo-Frenkel avec l'axiome du Choix), on peut rendre rigoureux tout ce qui a été obtenu auparavant (le groupe Bourbaki s'est chargé de publier une série de livres absolument imbuvables à cet effet). Il faut admettre que l'on ne peut prouver la cohérence de ce système à l'intérieur de lui-même, ce qui n'empêche pas les mathématiciens contemporains de dormir.

Au cours de cette quête épique, de nombreuses notions fascinantes ont émergé, et avec elles une réflexion approfondie (et mathématique) sur la notion même de raisonnement mathématique [3]. Qu'est-ce qu'un système logique ? Comment séparer le 'sens' des 'symboles', la 'vérité' de la 'démonstrabilité' ? Quand peut-on garantir qu'un système d'axiome est cohérent (i.e. sans paradoxes) ou complet (i.e. on peut montrer tout ce qui est vrai) ? Comment Gödel a-t-il pu montrer qu'on *ne peut pas montrer* la cohérence d'un système d'axiomes à l'intérieur de lui-même ? [4].

Le suspense est insoutenable, aussi ne le soutiendrons-nous pas :

Un système logique (classique du premier ordre) consiste en

- un langage formel ou informel, les fameux symboles sans signification des Formalistes
- un système de règles de déduction, qui donnent les règles pour manipuler ces symboles, et encodent la validité des arguments,
- une sémantique, qui donne une sens aux symboles (les IA pourront peut-être s'en passer, mais les humains ont encore besoin de ces expédients, sous peine de migraine) et encode la notion de vérité. La notion que l'on verra est issue de la *théorie des modèles*.

L'objectif des trois premières sections sera de se donner ces trois éléments, et leurs premières propriétés. Ensuite, on s'intéressera au lien entre les déductions abstraites et la sémantique : c'est la

2. L'école pythagoricienne, en activité en Grèce au 6ème siècle avJC, croyait uniquement en l'existence des nombres entiers ou rationnels. Une légende (fausse) rapporte que lorsque l'un des leurs, Hippasus, démontra que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, $\sqrt{2}$, n'était pas rationnelle, les pythagoriciens étouffèrent l'affaire en jetant Hippasus à la mer. Vue sous cet angle, la paranoïa de Gödel, qui craignait d'être empoisonné, n'était peut-être pas tout à fait...dépourvue de fondement.

3. Insérer soundtrack du film Inception ici

4. Soundrack d'Inception derechef.

méta-théorie. On discutera en particulier des notions de cohérence et de complétude. (+incomplétude de Godel ?). On parlera ensuite de considérations plus philosophiques sur les liens que ces systèmes logiques entretiennent, au delà des mathématiques, avec le “raisonnement juste” en général.

Ensuite, on ira plus loin encore dans le coupage de cheveux en quatre en étudiant les limites et paradoxes de ce type de logique. On verra qu'il existe d'autres systèmes de logique possibles permettant de les dépasser, et on reparlera en particulier de logique intuitionniste et des mathématiques constructives de Brouwer, entre autres.

1 Langage formel

En mathématiques, et surtout en algèbre, un moyen commode d'étudier de larges classes d'objets d'un seul coup, et sans avoir à les regarder un par un - car les mathématiciens, habitués à se colleter avec l'infini et au-delà, savent qu'ils n'auraient pas fini à temps pour le thé - est le suivant :

a) extraire les points communs à tous ces objets ;

b) formaliser ces points communs en une poignée d'axiomes, c'est à dire une suite de symboles qu'on pourra ensuite interpréter de plusieurs façons ;

c) travailler uniquement sur ces axiomes, sans plus se soucier des interprétations.

Ainsi, le signe + s'interprète différemment si on somme des réels, des matrices ou des fonctions $\mathcal{C}^3$; mais on peut décider d'étudier tous les ensembles munis d'une “sorte d'addition”, c'est à dire tous ceux tels que

$$\begin{gathered}\forall x\ x+0=x\\ \forall x\forall y\forall z\ (x+y)+z=x+(y+z)\\ \forall x\exists y\ x+y=0\\ \forall x\forall y\ x+y=y+x.\end{gathered}$$

Afin d'impressionner quiconque ne le serait pas par ces formules cabalistiques, on dit alors qu'on étudie les groupes abéliens.

L'étape importante, ici, a été de passer d'objets mathématiques spécifiques (l'addition des entiers) à une *structure* plus générale, en séparant les symboles et les formules de leur sens dans un contexte donné. Plus généralement, c'est le rôle des langages formels.

Définition 1. *Un langage formel d'ordre 1 sur K, noté $\mathcal{L} = \mathcal{L}1K$ est la donnée d'une collection infinie de symboles, séparés en plusieurs catégories : d'abord, une terminologie non-logique K, constituée des éléments suivants*

— *Un ensemble de* constantes, *éventuellement vide, notées $\{a, a_1, b_{32}, ...\}$;*

— *Pour chaque entier n, un ensemble éventuellement vide de symboles de* fonctions *d'*arité[5] *n. On les notera, par exemple $f_1^n, f_2^n, \dots$*

— *Pour chaque entier n, un ensemble éventuellement vide de symboles de* prédicats *d'arité n : On les notera, par exemple $R_1^n, R_2^n, \dots$.*

et d'autre part des symboles logiques

— *Un ensemble dénombrable de* variables $Vars = \{x, x_1, x_2, ...y, y_1, \dots\}$

— *Des parenthèses : (,).*

— *Le symbole d'égalité =.*

— *Des* connecteurs *: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.*

— *Deux quantificateurs : $\forall, \exists$.*

5. c'est à dire admettant n arguments

Remarque 2. Les symboles de prédicats d'ordre 0 sont, en substance, des phrases se suffisant à elles-mêmes ; ceux d'ordre 1 (prédicats monadiques) serviront à énoncer des propriétés (eg "est rouge"), ceux d'ordre 2 (prédicats binaires) énonceront des relations binaires (eg "est plus grand que") ; *mais* cela n'interviendra que lorsqu'on se sera donné une sémantique. D'ici là, comme le nom l'indique, ce ne sont que des symboles.

Exemple 3. Ainsi, pour étudier les groupes abéliens, on pourrait considérer le langage sur $K = \{0, +\}$. Sin l'on souhaite un symbole spécial $-$ pour l'opposé d'un élément, on peut considérer $K' = \{0, +, -\}$; ou encore, on pourrait adopter une notation multiplicative : $K'' = \{1, \cdot\}$. En fait, en laissant libre cours à notre créativité, on peut même faire l'étude des groupes en utilisant les symboles $K_{n'imp} = \{\clubsuit, \star\}$.

Pour parler de langagee, il nous faut définir des mots ; plus précisément, des éléments formés à partir du lanages que l'on pourra utiliser pour désigner des objets [6]. C'est ce que l'on appelera des *termes :* un terme des $\mathcal{L}1K =$ est une suite finie de symboles t qui est

- soit un symbole de constante a ;
- soit une variable x ;
- soit de la forme $ft_1 \dots t_n$, où f est un symbole de fonction d'arité n et les t_i sont des termes.

Exemple 4. Considérons $K = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, +, <\}$, un langage muni d'un symbole pour chaque entier, un symbole de fonction binaire $+$ et un symbole de prédicat binaire $<$. Alors $\bar{3}$, $+\bar{2}\bar{5}$ et $+\bar{4} + x\bar{1}$ sont des termes. Pour améliorer la lisibilité des symboles binaires (de fonctions comme de prédicats), on adoptera, pour les deux derniers, la notation plus familière $\bar{2} + \bar{5}$ et $\bar{4} + (x + \bar{1})$.

Il nous reste à former des *phrases* dans notre langage ; ainsi, pour reprendre l'exemple précédent, on souhaite que

$$(x < \bar{3}) \vee (x = y)$$

soit une formule valide, mais pas

$$x(\to \bar{3} < .$$

Pour formaliser cela, on va procéder récursivement. On commence par les formules les plus simples :

Définition 5. *Si V^n est un symbole de prédicat et $t_1 ... t_n$ des termes de K, alors $Vt_1 ... t_n$ est une* formule atomique *de $\mathcal{L}1K =$. De plus, pour tous termes t_1 et t_2, $t_1 = t_2$ est une formule atomique.*

Exemple 6. $R^1 x, R^3 aab, y = f^2 t_1 t_2$.

On peut alors définir récursivement les formules de via les clauses suivantes :

1. Les formules atomiques sont des formules ;
2. (Négation) Si θ est une formule, $\neg\theta$ est une formule ;
3. (Conjonction) Si θ et φ sont des formules alors $(\theta \wedge \varphi)$ aussi ;
4. (Disjonction) Si θ et φ sont des formules alors $(\theta \vee \varphi)$ aussi ;
5. (Condition) Si θ et φ sont des formules alors $(\theta \to \varphi)$ aussi ;
6. Si θ est une formule et v une variable alors $\forall v\theta$ est une formule ;
7. Si θ est une formule et v une variable alors $\exists v\theta$ est une formule ;
8. Toutes les formules se construisent ainsi.

On dispose alors d'un outil de démonstration très puissant : la récurrence sur la complexité d'une formule, c'est à dire le nombre de clauses utilisées pour l'écrire. On démontre ainsi :

Théorème 7. *Toute formule de $\mathcal{L}1K =$ a le même nombre de (et de).*

6. des noms plutôt que des verbes ou des adjectifs, donc.

En effet, cette propriété est trivialement vraie pour les formules atomiques, et est conservée par les clauses 2-7.

On distingue deux types de formules : les *énoncés* (ou propositions), auxquels on pourra, plus tard, attribuer une valeur de vérité bien définie ; et les formules ouvertes, qui "dépendent" de la valeur donnée aux variables.

Exemple 8. Posons $K_{nt} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$ le langage de la théorie des nombres, auquel on reviendra souvent. La formule

$$\forall x \forall y (y < x) \vee ((x = y) \vee (x < y)) \tag{1}$$

est un énoncé (qui, avec l'interprétation adéquate, affirme que, étant donnés deux entiers, soit l'un est plus petit que l'autre, soit l'inverse, soit ils sont égaux) ; tandis que

$$x < SS0$$

est une formule ouverte : elle peut être vraie ou fausse, suivant la valeur de x (en l'occurrence, dans une interprétation raisonnable, selon si x est plus petit ou plus grand que 2).

Pour formaliser cela, on définit récursivement la notion de "dépendre de la valeur d'une variable" :

Définition 9. *Soit x une variable et ϕ une formule. On dit que x est* libre *dans ϕ si*

- *ϕ est atomique et le symbole x apparaît dans ϕ ;*
- *ϕ est de la forme $\neg\alpha, \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta$ ou $\alpha \to \beta$ et x est libre dans α ou β ;*
- *ϕ est de la forme $\forall u\alpha$ ou $\exists u\alpha$, x n'est pas u et x est libre dans α.*

Alors, un énoncé *de $\mathcal{L}1K =$ est une formule ne contenant aucune variable libre.*

Propriétés de la syntaxe. On a ainsi définit un langage formel, qui se distingue des langages naturels notamment par l'absence d'ambiguïtés. Par exemple, on a supposé au départ que les catégories (termes, variables, connecteurs, quantificateurs...) sont disjointes, ainsi, les symboles ont des "rôles" uniquement définis. Comparer avec le mot "certain" en français qui peut indifféremment être utilisé comme valeur de vérité ou comme quantificateur existentiel. Le langage formel, lui, n'est pas *équivoque*.

Un autre type d'ambiguïté est l'***amphibologie***, dûe aux différentes façons de "parenthéser" une expression. Par exemple "Anne est en vacances, et Paul dessine, ou Maria est au labo." Un équivalent dans notre langage formel serait $A \wedge B \vee C$, qui pourrait référer soit à $((A \wedge B) \vee C)$, soit à $(A \wedge (B \vee C))$. Or, on peut montrer que ce cas ne peut pas se produire dans $\mathcal{L}1K =$.

On utilise pour cela les lemmes suivants, montrés par la méthode de récurrence expliquée plus haut.

Lemme 10. *Toute formule est constituée d'une suite éventuellement vide de marqueurs unitaires ($\neg, \forall x, \exists v$) suivie soit d'une formule atomique, soit d'une formule obtenue par un connecteur binaire (clauses 3-5).*

Lemme 11. *Si une formule θ contient une parenthèse gauche, elle termine par une parenthèse fermante associée à la parenthèse ouvrante la plus à gauche dans θ.*

Lemme 12. *Toute formule contient une formule atomique.*

Théorème 13. *Soient α, β deux chaînes de caractères non vides telles que $\alpha\beta$ soit une formule. Alors α n'est pas une formule.*

Preuve. On distingue les cas suivants :

- Si α contient une parenthèse gauche, alors $\alpha\beta$ doit terminer par une parenthèse fermante qui appartient à β. Mais alors α a plus de (que de) et n'est donc pas une formule.

— Sinon, $\alpha\beta$ est décrit par le lemme 10 : une suite de marqueurs unitaires suivi d'une formule φ atomique ou binaire.

  — Si φ est obtenue par un connecteur binaire, φ contient une parenthèse gauche, donc α est une suite de merqueurs unitaires et ne contient pas de formule atomique : ce n'est pas une formule.

  — Si φ est une formule atomique, alors φ est de la forme $t_1 = t_2$, auquel cas α est une suite de marqueur unitaire suivi de t_1 ou $t_1 =$; ou $\varphi = Pt_1...t_n$ et $\alpha = P$ ou $Pt_1...t_m$ avec $m < n$. Dans tous les cas, α ne contient pas de formule atomique, donc n'est pas une formule. □

On peut alors montrer l'absence d'amphibologie :

Théorème 14. *Soit θ une formule de $\mathcal{L}1K =$. Si θ n'est pas atomique, alors il existe une unique clause parmi 2-7 qui a été utilisée en dernier pour construire θ.*

Preuve. On discute suivant le premier caractère de θ.

Si c'est une lettre de prédicat ou un terme, alors θ est atomique, et n'a pas été obtenue par une des clauses 2-7, qui modifient le premier caractère.

Sinon, si c'est $\neg$, alors θ n'a pu être obtenue qu'en appliquant la clause 2. Il en va de même de $\forall$ pour la clausse 6 et $\exists$ pour la clause 7.

Si θ commence par (, alors elle a été obtenue par une des clauses 3-5. Montrons qu'on a unicité dans ce cas. Par exemple, montrons, par l'absurde, que les formules $\psi_1 \vee \psi_2$ et $\psi_3 \wedge \psi_4$ ne peuvent être identiques. Par le thèorème précédent, puisque ψ_1 et ψ_3 sont des formules, aucune ne peut être une sous partie stricte de l'autre. Elles doivent donc être la même formule. Mais alors le symbole $\wedge$ soit être égal au symbole $\vee$, ce qui n'est pas le cas. □

Remarque 15. Ce théorème nous permet de parler du connecteur principal d'une formule composée, suivant la dernière clause appliquée.

2 Déduction

On souhaite maintenant donner un sens à la notion de preuve. Maintenant que toutes les pièces ont été définies proprement, il s'agit de définir les règles du jeu : comment passer d'une formule à une autre, d'une façon qui reflète un raisonnement ; plus précisément un raisonnement mathématique, où l'on part de prémisses supposés connus et l'on souhaite en tirer une conclusion, qu'on pourra ajouter à la liste des affirmations justifiées (et donc, on pourra l'utiliser comme prémisse à son tour).

Définition 16. *Un système déductif sur $\mathcal{L}1K =$ est donné par un ensemble de formules Λ dont les éléments sont qualifiés d'*axiomes logiques*, et un ensemble de paires (Γ, ϕ) appelées* règles d'inférence*, où Γ est un ensemble fini de formules et ϕ une formule.*

Soit Σ une collection de formules, $D = \{\phi_1 \dots, \phi_n\}$ un ensemble fini de formules. On dit que D est une déduction de ϕ_n à partir de Σ si, pour tout $1 \leq i \leq n$,

— *soit $\phi_i \in \Lambda$*

— *soit $\phi_i \in \Sigma$,*

— *Soit il existe une règle d'inférence (Γ, ϕ_i) où $\Gamma \subset \{\phi_1, \dots, \phi_{i-1}\}$.*

Dans ce cas ϕ_n est la conclusion*, les autres ϕ_i sont appelées des* prémisses*. On notera $\Sigma \vdash \phi$.*

Remarque 17. a) Différents choix pour les axiomes logiques et les règles d'inférence donnent lieu à différents types de logiques. On va ici donner le système déductif donnant lieu à la logique classique, ou de premier ordre, qui est la plus communément utilisée ; on verra des alternatives ultérieurement.

b) Si $\Lambda = \emptyset$ et $\Sigma = \emptyset$, on ne peut rien déduire de Σ. Autrement dit, il nous faut au moins des axiomes logiques pour démarrer [7].

7. Apparemment, cela irritait beaucoup Russell.

Substitution de variables. On commence par introduire une règle permettant de remplacer des variables libres par des termes :

Définition 18. *Soit u un terme, x une variable et t un terme ; on appelle $u(x|t)$ le terme défini par*

- *si u est une variable différente de x ou une constante, alors $u(x|t) = u$;*
- *si u est x, alors $u(x|t) = t$;*
- *si $u = f^n u_1 \dots u_n$, alors $u(x|t) = f^n u_1(x|t) \dots u_n(x|t)$.*

Soit ϕ une formule, x une variable et t un terme ; on appelle $\phi(x|t)$ la formule définie par

- *Si ϕ est $t_1 = t_2$, $\phi(x|t)$ est $t_1(x|t) = t_2(x|t)$;*
- *Si ϕ est de la forme $Rt_1 \dots t_n$, $\phi(x|t)$ est $Rt_1(x|t) \dots t_n(x|t)$;*
- *si ϕ est $\neg\alpha$ alors $\phi(x|t)$ est $\neg\alpha(x|t)$;*
- *si ϕ est de la forme $\alpha \vee \beta$, $\phi(x|t)$ est $\alpha(x|t) \vee \beta(x|t)$; il en va de même pour les connecteurs $\wedge$ et $\rightarrow$;*
- *si ϕ est de la forme $\forall v\alpha$, $\phi(x|t)$ est*

$$\begin{cases} \phi \text{ si } x \text{ est } v, \\ \forall v\ \alpha(x|t) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Inversement, on définit la substitution d'un terme à une variable d'une façon qui ne perturbe pas les quantificateurs :

Définition 19. *Soit ϕ une formule, x une variable et t un terme ; on dit que t est substituable pour x dans ϕ si :*

- *ϕ est atomique ;*
- *ϕ est de la forme $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ et t est substituable pour x dans α et β ;*
- *ϕ est de la forme $\forall y\ \alpha$ ou $\exists y\alpha$ et soit x n'est pas libre dans ϕ, soit y n'apparaît pas dans t et t est sustituable à x dans α.*

Axiomes logiques. Ceci posé, on se donne les axiomes logiques suivants :

(E1) Pour tout terme t, $t = t$ est dans Λ.

(E2) Pour tout symbole de fonction f^n, et pour tous n-uplets de variables $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, $[(x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n)] \rightarrow f^n x_1 \dots x_n = f^n y_1 \dots y_n$ est dans Λ.

(E3) Pour tout symbole de prédicat n-aire R^n, et pour tous n-uplets de variables $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$, $[(x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_n = y_n)] \rightarrow (R^n x_1 \dots x_n \rightarrow R^n y_1 \dots y_n)$ est dans Λ.

($\forall$ E) Pour toute formule ϕ, variable x et terme t tel que t est substituable à x dans ϕ, $\forall x\ \phi \rightarrow \phi(x|t)$ est dans Λ.

($\exists$ I) Sous les mêmes hypothèses, $\phi(x|t) \rightarrow \exists x\ \phi$ est dans Λ.

Règles d'inférences. On va définir les règles de déductibilité par récurrence.

(As) ("Rule of assumption") Si ϕ est dans Γ alors $\Gamma \vdash \phi$.

($\wedge$I) Si $\Gamma_1 \vdash \theta$ et $\Gamma_2 \vdash \psi$ alors $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (\theta \wedge \psi)$.

($\wedge$E) Si $\Gamma \vdash (\theta \wedge \psi)$, alors d'une part $\Gamma \vdash, \theta$ et d'autre part $\Gamma \vdash \psi$.

($\vee$I) Si $\Gamma \vdash \theta$ alors $\Gamma \vdash (\theta \vee \psi)$. Si $\Gamma \vdash \theta$ alors $\Gamma \vdash (\psi \vee \theta)$.

($\vee$E) Si $\Gamma_1 \vdash (\theta \vee \psi)$, $\Gamma_2, \theta \vdash \phi$ et $\Gamma_3, \psi \vdash \phi$ alors $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash \phi$.

($\rightarrow$I) Si $\Gamma, \theta \vdash \psi$ alors $\Gamma \vdash (\theta \rightarrow \psi)$.

($\rightarrow$E) (Modus Ponens) Si $\Gamma_1 \vdash (\theta \rightarrow \psi)$ et $\Gamma_2 \vdash \theta$ alors $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$.

(¬I) Si $\Gamma_1, \theta \vdash \psi$ et $\Gamma_2, \theta \vdash \neg\psi$ alors $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg\theta$. Autrement dit, on veut que ψ et $\neg\psi$ soient incompatibles.

Remarquons que de cela et 1, on peut déduire $\{A\} \vdash \neg\neg A$, mais pas l'inverse. Pour cela, on introduit la règle d'élimination des double négation[8] :

(¬E) Si $\Gamma \vdash \neg\neg\theta$ alors $\Gamma \vdash \theta$.

De là, on peut montrer qu'on obtient la *loi du tiers exclus* $\vdash (A \vee \neg A)$.

(EFQ) (*Ex falso quodlibet*) Si $\Gamma_1 \vdash \theta$ et $\Gamma_2 \vdash \neg\theta$ alors pour toute phrase ψ, $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$. Cette règle, en substance, énonce que d'un ensemble de formules contradictoires, on peut déduire n'importe quoi. Quoique très commode, cette règle peu intuitive est remise en cause dans certains systèmes logiques, notamment la logique de la pertinence ("relevance logic") dont on reparlera.

(∀I) Pour tout terme t, si $\Gamma \vdash \theta(v|t)$, alors du moment que t n'est pas dans Γ ou θ, on a $\Gamma \vdash \forall v\theta$.

C'est la base de la notion d'élément arbitraire en maths.

(∃E) Pour tout terme t, si $\Gamma_1 \vdash \exists v\theta$ et $\Gamma_2, \theta(v|t) \vdash \phi$, alors $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \phi$, pourvu que t n'apparaisse pas dans ϕ, Γ_2 ou θ.

C'est là aussi une inférence commune lorsque l'on traite d'objets arbitraires en maths.

(TAF) Ce sont les seules manières d'obtenir des déductions.

Remarque 20. 1. Dans tous ces cas, on obtient des paires (Γ, ϕ) que l'on ajoute aux règles d'inférence. Une façon alternative de procéder (lien vers une annexe) consiste à définir une notion de *conséquence propositionnelle* à partir de tables de vérités pour les différents connecteurs.

2. Comme l'indique l'indexation des règles, chaque connecteur et quantificateur donne lieu à deux règles : une qui *introduit* le symbole (I) et une qui l'*élimine* (E).

Comme précédemment, la dernière règle ("That's all folks") permet de raisonner par récurrence sur les règles utilisées pour obtenir un argument. Si une propriété est vérifiée par les arguments dont la conclusion est un axiome, ou obtenue par la règle (As), et est préservée par toutes les autres règles, alors tout argument possède cette propriété. On montre ainsi, par récurrence sur le nombre de règles utilisées :

Lemme 21. *Soient Γ, Γ' deux ensembles de formules, t, t' deux termes. Si Γ et Γ' sont identiques à ceci près que pour toute formule θ dans Γ, $\theta(t|t')$ apparaît dans Γ', alors pour toute phrase ϕ ne contenant ni t ni t', si $\Gamma \vdash \phi$ alors $\Gamma' \vdash \phi$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre $n > 0$ de règles d'inférence utilisées pour obtenir $\Gamma \vdash \phi$.

Initialisation : Si $n = 1$, alors soit ϕ est un axiome logique, donc se déduit de tout ensemble d'énoncés; soit la règle appliquée est (As), donc $\phi \in \Gamma$; dans ce cas comme ϕ ne contient ni t ni t', ϕ est assi dans Γ'. Dans les deux cas, on a bien $\Gamma' \vdash \phi$, pour la même raison que $\Gamma \vdash \phi$.

Hérédité : Supposons le lemme prouvé pour toutes les déductions de moins de n étapes, et supposons que $\Gamma \vdash \phi$ s'obtienne en n étapes.

Si la dernière règle utilisée est (∧I), ϕ est de la forme $(\theta \wedge \psi)$ et $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \vdash \theta$ et $\Gamma_2 \vdash \psi$. Mais alors $\Gamma_1 \vdash \theta$ et $\Gamma_2 \vdash \psi$ s'obtiennent en moins de n étapes, et t, t' n'apparaissent pas dans θ et ψ. Par hypothèse de récurrence, on a donc $\Gamma_1' \vdash \theta$ et $\Gamma_2' \vdash \psi$, où Γ_1', Γ_2' s'obtiennent en remplaçant t par t' dans Γ_1 et Γ_2. Mais alors $\Gamma' = \Gamma_1', \Gamma_2'$ et par (∧I), on a $\Gamma' \vdash (\theta \wedge \psi)$, càd $\Gamma' \vdash \phi$.

Si la dernière règle utilisée est (∧E), alors l'étape précédente est $\Gamma \vdash (\phi \wedge \psi)$ pour un énoncé ψ. Si ψ ne contient pas t, on utilise l'hypothèse de récurrence et la règle (∧E) pour conclure. Sinon, on obtient $\Gamma' \vdash (\theta \wedge \psi)(t|t')$, mais ceci se réécrit $\Gamma' \vdash (\theta(t|t') \wedge \psi(t|t'))$, ou encore, puisque ϕ ne contient pas t, $\Gamma' \vdash (\theta \wedge \psi(t|t'))$. On applique (∧E) pour conclure.

Les autres cas se traitent de façon similaire. □

8. Comme on le verra, cette règle est l'une des nombreuses choses que Brouwer et son armée d'Intuitionnistes rejettent.

Lemme 22 (Affaiblissement des hypothèses). *Si* $\Gamma_1 \vdash \phi$ *et* $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$*, alors* $\Gamma_2 \vdash \phi$*.*

Remarque 23. Ce lemme, utilisé constamment en maths, dit qu'en ajoutant des hypothèses, on peut prouver au moins autant de choses qu'avant. Mon chef de thèse appelait cela QPPPM (Qui Peut le Plus Peut le Moins).

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence sur le nombre $n > 0$ de règles d'inférence utilisées pour obtenir $\Gamma_1 \vdash \phi$.

Initialisation : Si $n = 1$, alors soit ϕ est un axiome logique, auquel cas tout ensemble de propositions permet de déduire ϕ, ou alors la règle utilisée est (As), auquel cas $\phi \in \Gamma_1 \subset \Gamma_2$. Dans tous les cas, par la même règle, $\Gamma_2 \vdash \phi$.

Hérédité : Supposons le résultat prouvé pour toutes les déductions de moins de n étapes et supposons que $\Gamma_1 \vdash \phi$ s'obtienne en n étapes. Si la dernière règle utilisée est ($\wedge$I) alors ϕ est de la forme $\theta \wedge \psi$, et $\Gamma_1 = \Gamma_3, \Gamma_4$ avec $\Gamma_3 \vdash \theta$ et $\Gamma_4 \vdash \psi$. Mais alors ces deux dernières déductions ont été obtenues en $n - 1$ étapes, et on a $\Gamma_3 \subset \Gamma_2$, $\Gamma_4 \subset \Gamma_2$, donc par hypothèse de récurrence, $\Gamma_2 \vdash \theta$ et $\Gamma_2 \vdash \psi$. Alors, par ($\wedge$I), $\Gamma_2 \vdash (\theta \wedge \psi)$, c'est-à-dire $\Gamma_2 \vdash \phi$.

La plupart des autres cas sont identiques ; on va tout de même s'intéresser à ($\forall$I) et ($\exists$E), cas où les quantificateurs requièrent un peu plus de prudence.

Si la dernière règle utilisée pour obtenir $\Gamma_1 \vdash \phi$ est ($\forall$I) alors ϕ est de la forme $\forall v\theta$, et on a $\Gamma_1 \vdash \theta(v|t)$ pour un terme t n'intervenant ni dans Γ_1 ni dans θ. L'ennui, c'est que t pourrait apparaître dans un énoncé de Γ_2 ; on ne peut donc pas appliquer l'hypothèse de récurrence directement. Soit t' un terme n'apparaissant dans aucun membre de Γ_2, et Γ' obtenu en remplaçant tous les t de Γ_2 par t'. Alors, puisque t n'apparaît pas dans Γ_1, on a toujours $\Gamma_1 \subset \Gamma'$ et, par hypothèse de récurrence (appliquée comme ci-dessus), $\Gamma' \vdash \forall v\theta$. Mais $\forall v\theta$ ne contient pas t, donc, d'après le lemme 21, $\Gamma_2 \vdash \forall v\theta$.

Si la dernière règle utilisée est ($\exists$E), alors on a $\Gamma_1 = \Gamma_3, \Gamma_4$ avec $\Gamma_3 \vdash \exists v\theta$ et $\Gamma_4, \theta(v|t) \vdash \phi$, où le terme t n'apparaît pas dans ϕ, θ ou Γ_4. Si t n'apparaît dans aucun énoncé de Γ_2, on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à $\Gamma_3 \vdash \exists v\theta$ et $\Gamma_4, \theta(v|t) \vdash \phi$, puis la règle ($\exists$E) ; sinon, on suit la même procédure que pour ($\forall$I) et on applique le Lemme 21. □

De la règle (TAF), on déduit :

Théorème 24. $\Gamma \vdash \phi$ *si, et seulement si il existe un sous ensemble fini* $\Gamma' \subset \Gamma$ *tel que* $\Gamma' \vdash \phi$*. Autrement dit, toute déduction est établie en un nombre fini d'étapes.*

Remarque 25. On peut en fait déduire *ex falso quolibet* du reste du système : Supposons que $\Gamma_1 \vdash \phi$ et $\Gamma_2 \vdash \neg\phi$. Alors par le lemme 22, on peut rajouter des hypothèses : $\Gamma_1, \neg\psi \vdash \phi$ et $\Gamma_2, \neg\psi \vdash \neg\phi$. En utilisant ($\neg$I), on obtient donc $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg\neg\psi$ et, par élimination des doubles négations, $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \psi$; et ce, pour n'importe quelle phrase ψ. C'est probablement ce qui a poussé certain logiciens à mettre en place des systèmes sans élimination des doubles négations.

Par la même méthode de récurrence sur le nombre d'étapes, on obtient aussi :

Théorème 26 (Règle de coupure). *Si* $\Gamma_1 \vdash \psi$ *et* $\Gamma_2, \psi \vdash \theta$ *alors* $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \theta$*.*

Ce théorème nous permet d'enchaîner les inférences, et notamment d'utiliser des théorèmes déjà démontrés pour en démontrer de nouveaux. Dans certains systèmes logiques, c'est un résultat profond, et dans d'autres, il n'est carrément pas valide. Le système déductif introduit ici est en partie conçu pour obtenir facilement cette propriété.

Définition 27. *Si* $\Gamma \vdash \theta$*, on dit que* θ *est une* conséquence déductive *de* Γ*, et que l'argument* $\langle \Gamma, \theta \rangle$ *est dit* valide.

Un ensemble de formules Γ *est* cohérent *s'il n'existe pas d'énoncé* θ *tel que* $\Gamma \vdash \theta$ *et* $\Gamma \vdash \neg\theta$*.*

De la propriété d'*ex falso quodlibet*, on déduit :

Définition 28. *Une collection* Γ *est cohérente s'il y a au moins une formule* θ *telle qu'on n'ait pas* $\Gamma \vdash \theta$.

Une collection de phrases Γ est dit *maximalement cohérent* si Γ est cohérent et si l'ajout de toute phrase qui n'est pas déjà dans Γ le rend incohérent.

Remarque 29. Si Γ est maximalement cohérent, alors $\Gamma \vdash \theta$ ssi θ est dans Γ.

Théorème 30 (Lemme de Lindenbaum). *Si* Γ *est un ensemble cohérent, alors* Γ *est contenu dans un ensemble maximalement cohérent.*

Preuve. Bien que le théorème soit plus général, on suppose ici que l'ensemble de terminologie non-logique K (c'est-à-dire l'ensemble des constantes et lettres de prédicat) est dénombrable.

On peut alors énumérer les prases de $\mathcal{L}1K =$: notons-les $\theta_0, \theta_1, \dots$, et définissons par récurrence une suite de'ensemble de phrases comme suit. On pose $\Gamma_0 = \Gamma$ et, pour tout n, si Γ_n, θ_n est cohérent, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n, \theta_n$; sinon $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$.

Soit Γ' l'union des Γ_n ; montrons par l'absurde que Γ' est cohérent. Si ce n'est pas le cas, il existe θ telle que $\Gamma' \vdash \theta$ et $\Gamma' \vdash \neg\theta$. Or, il existe un sous ensemble fini Γ'' de Γ' tel que $\Gamma'' \vdash \theta$ et $\Gamma'' \vdash \neg\theta$. Comme Γ'' est fini, il est inclus dans un des Γ_n, et par affaiblissement, Γ_n est donc incohérent, ce qui contredit sa construction.

On en déduit que Γ' est cohérent. Supposons que $\theta = \theta_m$ ne soit pas dans Γ' alors θ_m n'est pas dans Γ_{m+1}, donc Γ_m, θ_m est incohérent. On peut donc déduire une paire d'opposés contradictoires de Γ', θ_m, donc Γ' est maximalement cohérent. $\square$

Remarque 31. On a utilisé que Γ_n est soit cohérent, soit incohérent, ce qui est une version du tiers exclus. De ce fait, le lemme de Lindenbaum n'est pas accepté par les logiciens intuitionnistes.

3 Sémantique.

On s'intéresse (enfin !) au sens que l'on peut donner aux symboles du langage formel. Considérons par exemple le langage de la théorie des nombres introduit plus haut, le langage de premier ordre basé sur

$$K_{nt} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}.$$

La question est de savoir quelle interprétation on peut donner à ces symboles. Puisqu'on a vendu la mèche en l'appelant “langage de la théorie des nombres”, il semble qu'il n'y ait pas de question à se poser : les variables parcourent l'ensemble $\mathbb{N}$, 0 devrait être l'entier 0, S la fonction suivant qui à un entier n associe $n+1$, la fonction binaire $+$ doit représenter l'addition, $\cdot$ la multiplication, E la mise en exposant, etc. Il s'agit là d'*une* interprétation, certes particulièrement raisonnable.

Mais on peut aussi interpréter ces symboles comme représentant l'arithmétique modulo 2 : les variables vivent dans $\{0, 1\}$, $S(0) = 1$ et $S(1) = 0$, $+$ et $\cdot$ sont l'addition et la multiplication modulo 2, etc.

Si l'on se sent d'humeur taquine, on peut considérer que ce langage porte sur les objets { Motörhead, Papaye, Matrix Reloaded }, avec 0 interprété comme Papaye, S la fonction constante égale à Motörhead, $<$ l'égalité et $+$ et $\cdot$ les fonctions constantes égales respectivement à Matrix Reloaded et Papaye.

Le choix de l'une ou l'autre interprétation a évidemment un impact sur la *vérité* d'énoncés tels que

$$\forall x \, \neg Sx = 0.$$

Ainsi, dans la première interprétation, cet énoncé signifie qu'aucun entier ne vient avant 0, et est donc vrai. Dans la deuxième, il est faux puisque $S(1) = 0$. Dans la dernière, il énonce que Mötorhead n'est pas une papaye, ce qui est aussi vrai (à ma connaissance).

Définition 32. *Soit K un ensemble de terminologie non-logique. Une* interprétation *M du langage $\mathcal{L}1K =$ est la donnée d'un ensemble non-vide d appelé* domaine, *ou* univers du discours*, ainsi que*

- *pour chaque constante c de K,un élément c^M de d ;*
- *pour chaque symbole de fonction f^n, une fonction $f^M : d^n \to d$;*
- *pour chaque 0-symbole de prédicat P^0, une valeur de vérité ;*
- *pour chaque n-symbole de prédicat P^n, un sous-ensemble P^M de d^n.*

Le domaine a pour fonction, en gros, de déterminer *de quoi* parle le langage, quels sont les *objets* dont il parle. Ce sera l'habitat naturel des variables. Ainsi, on peut noter

$$\mathfrak{N} = (d = \mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, E, <)$$

l'interprétation "naturelle" du langage de la théorie des nombres $\mathcal{L}1K_{nt}$.

Exemple 33 (Structures de Henkin). Considérons un langage de premier ordre $\mathcal{L}$ basé sur la terminologie non-logique $K = \{0, f, g, R\}$, où 0 est une constante, f une fonction unitaire, g une fonction binaire, et R un symbole de prédicat d'arité 3. On considère l'interprétation M dont le domaine est donné par $d = \{$ termes de $\mathcal{L}$ sans variable$\}$ et telle que

$$0^M = 0 \in d$$
$$f^M : t \in d \mapsto ft \in d$$
$$g^M : (t, s) \in d^2 \mapsto fts \in d$$

et on prend pour R^M un sous-ensemble quelconque de d^3.

Cette interprétation, construite à partir *du langage lui-même*, peut se généraliser à n'importe quel langage du premier ordre $\mathcal{L}1K =$. On appelle cela des *interprétations de Henkin* ; elles joueront un rôle-clé dans la preuve du théorème de complétude 47.

Définition 34. *On dit que s est un* assignement des variables *sur une interprétation M, si s est une fonction des variables vers le domaine d de M.*

A partir un assignement donné s, on construit un assignment de termes *$\bar{s}$, qui est une fonction de l'ensemble des termes du langage dans d défini récursivement par*

- *si t est une variable, $\bar{s}(t) = s(t)$;*
- *si t est une constante c, $\bar{s}(t) = c^M$;*
- *si t est $f^n t_1 \dots t_n$, $\bar{s}(t) = f^M(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n))$.*

Puisque dans le cas général, la vérité ou la fausseté d'un énoncé dépend de l'interprétation, on va définir la "vérité" relativement à un modèle donné. C'est la notion de satisfaction :

Définition 35. *Soit ϕ une formule de $\mathcal{L}1K =$, M une interprétation et s un assignement de variables sur M. On va définir la relation M* satisfait *ϕ* sous l'assignement *s, noté $M, s \models \phi$, de façon récursive sur la complexité de ϕ.*

- *Si t_1 et t_2 sont des termes, $M, s \models t_1 = t_2$ si $\bar{s}(t_1) = \bar{s}(t_2)$ (autrement dit, si les deux termes désignent la même chose.)*
- *SI P^0 est une lettre de prédicat à 0 places,$M, s \models P$ ssi P^M est "vrai".*
- *Si S^n est un symbole de prédicat n-aire et $t_1, \dots, t_n$ des termes, alors $M, s \models St_1 \dots t_n$ ssi $(\bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n)) \in S^M \subset d^n$.*
- *$M, s \models \neg\theta$ ssi on n'a pas $M, s \models \theta$.*
- *$M, s \models (\theta \wedge \psi)$ (resp, $M, s \models (\theta \vee \psi)$) ssi on a $M, s \models \theta$ et (resp ou) $M, s \models \psi$.*
- *$M, s \models (\theta \to \psi)$ ssi on n'a pas $M, s \models \theta$, ou si $M, s \models \psi$.*

- *$M, s \models \forall v\theta$ ssi $M, s' \models \theta$ pour tout assignement s' identique à s sauf peut-être en v.*
- *$M, s \models \exists v\theta$ ssi $M, s' \models \theta$ pour au moins un assignement s' identique à s sauf peut-être en v.*

Par le théorème 14, cette définition est cohérente : il existe une unique façon de décomposer une formule complexe, et on n'obtient donc pas de diagnostic de satisfaction contradictoires.

Remarque 36. Sous ces règles de satisfaction, l'interprétation donne donc le sens qu'on attend aux connecteurs et quantificateurs logiques : $\wedge$ encode "et", $\vee$ encode "ou",...

Remarquons que $\to$ encore l'implication logique : on considère que P implique Q si P est faux, ou alors si Q est vrai. Cette définition ne fait pas consensus, en particulier parce qu'elle n'implique pas de relation particulière entre P et Q. Par exemple (dans l'interprétation habituelle du langage !) on a ainsi "Toutes les giraffes sont bleues implique que la Terre est ronde". C'est à ces "paradoxes de l'implication" que la "logique de la pertinence" (*relevance logic*) tente de répondre.

Théorème 37. *Pour toute formule θ, si s_1 et s_2 coïncident sur les variables libres de θ, alors $M, s_1 \models \theta$ si, et seulement si, $M, s_2 \models \theta$.*

Preuve. On procède par induction sur la complexité de la formule θ.

Initialisation : Si θ est une formule atomique, puisque les seules variables qui interviennent dans la définition de $M, s \models \theta$ dans ce cas, sont les variables libres de θ, on a bien $M, s_1 \models \theta$ ssi $M, s_2 \models \theta$.

Hérédité : Si θ est une négation $\neg\psi$, alors ψ est moins "complexe" que θ et, par hypothèse de récurrence, $M, s_1 \models \psi$ ssi $M, s_2 \models \psi$. D'après le sens donné à la négation, on a donc que $M, s_1 \models \neg\psi$ ssi $M, s_1 \models \psi$ est faux, ssi $M, s_2 \models \psi$ est faux, ssi $M, s_2 \models \neg\psi$. Les cas où θ est obtenue par un connecteur binaire ($\wedge, \vee, \to$) découlent d'une semblable application du sens commun [9].

Supposons que θ est de la forme $\exists v\psi$, et qu'on ait $M, s_1 \models \exists v\psi$. Alors il existe un assigment s_1', coïncidant avec s_1 sauf peut-être en v, tel que $M, s_1' \models \psi$. Par hypothèse de récurrence, si s_2 est l'assignement coïncidant avec s_2 sur les variables libres qui ne sont pas dans ψ, et qui coïncide avec s_1' pour celles-ci, alors $M, s_2' \models \psi$. Alors, s_2' coïncide en fait avec s_2 sur toutes les variables sauf peut-être v ; on a donc $M, s_2 \models \exists v\psi$. L'implication réciproque se montre exactement de la même façon. □

Définition 38. *Soit M une interprétation du langage $\mathcal{L}1K$ et θ une formule. Si pour tout assignement de variables s, $M, s \models \theta$, on dit que M est un* modèle *de θ, et on note $M \models \theta$.*

Si de plus θ est un énoncé, alors $M \models \theta$ ssi $M, s \models \theta$ pour au moins un assignement s. On dit dans ce cas que l'énoncé est vrai dans M.

Exemple 39. Considérons l'interprétation standard de l'arithmétique :

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, E, <)$$

accmpagné de l'assignement de variables

$$\begin{aligned} s : \mathrm{Vars} = \{v_0, v_1, \dots\} &\to \mathbb{N} \\ v_i &\mapsto 2i \end{aligned}$$

On considère la formule $\phi(v_1) : (v_1 + v_1 = SSSS0)$. Montrons que $\mathfrak{N}, s \models \phi$. En effet, on a d'une part

$$\begin{aligned} \bar{s}(v_1 + v_1) &= +^{\mathfrak{N}}(s(v_1), s(v_1)) \\ &= +^{\mathfrak{N}}(2, 2) \\ &= 4, \end{aligned}$$

9. ce qui est frustrant dans un contexte de preuve mathématique, mais rassurant sur le bien-fondé de nos "règles de raisonnement" !

et d'autre part

$$\begin{aligned}\bar{s}(SSSS0) &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(0^{\mathfrak{N}})))) \\ &= 4.\end{aligned}$$

Dans cette interprétation, les termes $v_1 + v_1$ et $SSSS0$ ont le même sens : donc $\mathfrak{N}, s \models \phi$.

Considérons maintenant un énoncé : soit σ l'énoncé

$$\forall v_1 \exists v_2 (v_1 = v_2 + v_2)$$

qui dit que tout nombre est pair. Au risque d'enfoncer des portes ouvertes, montrons que cet énoncé est faux dans l'interprétation standard de l'arithmétique.

D'après nos règles de satisfaction, on a $\mathfrak{N} \models \sigma$ ssi $\mathfrak{N}, s \models \sigma$ pour n'importe quel assignement s. Soit donc s un assignement quelconque. Alors $\mathfrak{N}, s \models \sigma$, noté aussi $\mathfrak{N} \models \sigma[s]$, ssi

$$\begin{aligned} &\mathfrak{N} \models (\forall v_1 \exists v_2 (v_1 = v_2 + v_2))[s] \\ \text{Pour tout } a \text{ dans le domaine } \mathbb{N},\ &\mathfrak{N} \models \exists v_2 (v_1 = v_2 + v_2))[s(v_1|a)] \\ \text{Pour tout } a \text{ dans le domaine, il existe } b \text{ tel que } &\mathfrak{N} \models (v_1 = v_2 + v_2))[s(v_1|a)(v_2|b)] \end{aligned}$$

Clairement, pour $a = 3$, on ne peut pas trouver de tel entier b ; ainsi $\mathfrak{N} \not\models \sigma$.

Théorème 40. *Si $K' \subset K$ et M' est la restriction de M à $\mathcal{L}1K'$, alors pour toute phrase θ de $\mathcal{L}1K'$, $M \models \theta$ ssi $M' \models \theta$.*

Si deux interprétations M_1 et M_2 ont même domaines et coïncident sur toute la terminologie non logique d'une phrase θ, alors $M_1 \models \theta$ ssi $M_2 \models \theta$.

Définition 41. *On dit qu'une déduction (Γ, θ), où Γ est l'ensemble des prémisses et θ la conclusion, est* valide, *ce que l'on note $\Gamma \models \theta$, si pour toute interprétation M du langage telle que $M \models \psi$ pour tout ψ dans Γ, alors $M \models \theta$.*

Une formule ϕ est valide *si $\emptyset \models \phi$.*

Un énoncé θ est satisfaisable *s'il existe une interprétation M telle que $M \models \theta$. On étend cette notion à un ensemble de phrases Γ, et on dit alors que M est un* modèle *de Γ.*

Ainsi, un argument est valide s'il est impossible pour ses prémisses d'être tous vrais et la conclusion fausse. C'est la contrepartie sémantique de la déductibilité. Comme on le verra, la satisfaisabilité est la contrepartie sémantique de la cohérence.

Exemple 42.

1. On sait déjà que la formule "$x = x$" est valide. Montrons que ni $x = y$ ni $\neg(x = y)$ ne sont valides. Soit M une interprétation du langage de domaine $d = \mathbb{N}$. Soit s_0 un assignement de variables tel que $s_0(x) = 342$, $s_0(y) = 56$. Alors on n'a pas $M, s \models x = y$ pour tout assignement s (s_0 est un contre exemple) ; donc $M \not\models x = y$. On obtient $M \not\models \neg(x = y)$ en utilisant cette fois un assignement s_1 tel que $s_1(x) = 42$, $s_1(y) = 42$.

   Remarquons que cela dénote une différence fondamentale entre les notions de validité et de déductibilité : on n'a pas ici de "tiers exclus" qui marche dans toutes les interprétations.

2. Considérons un langage sur $K = \{P\}$, où P est un symbole de prédicat binaire, et montrons que l'énoncé σ donné par

   $$(\exists y \ \forall \ x \ Pxy) \to (\forall \ x \ \exists y \ Pxy)$$

   est valide.

   Soit M une interprétation quelconque de domaine d, s : Vars $\to d$ un assignement quelconque. Il s'agit de montrer que $M, s \models \sigma$.

D'après la règle sur l'interprétation de $\to$, si $M, s \not\models \exists y \forall x \, Pxy$, alors $M, s \models \sigma$. Supposons donc que $M, s \models \exists y \forall x \, Pxy$. Cela signifie qu'il y a un élément $a \in d$ tel que $M \models (\forall x \, Pxy)[s(y|a)]$, c'està dire qu'il y a un élément fixe $a \in d$ tel que pour tout $b \in d$, $M \models (Pxy)[s(y|a)(x|b)]$. En d'autres termes, pour tout $b \in d$, $(b, a) \in P^M \subset d^2$.

Il s'agit de montrer $M, s \not\models \forall x \, \exists y \, Pxy$, autrement dit, que pour un élément quelconque $c \in d$, $M \not\models (\exists y \, Pxy)[s(x|c)]$. Il s'agit donc de trouver $e \in d$ tel que $M \not\models (Pxy)[s(x|c)(y|e)]$, c'est à dire tel que $(c, e) \in P^M$. Or, on sait que $(c, a) \in P^M$. On a donc bien $M, s \not\models \forall x \, \exists y \, Pxy$.

Ceci étant vrai pour toute interprétation M et assignement associé s, on a bien obtenu que la formule σ est valide.

Remarque 43. $\Gamma \models \theta$ si, et seulement si, l'ensemble $\Gamma, \neg\theta$ n'est pas satisfaisable.

Théorème 44. *Soit Γ un ensemble de phrases. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Γ est satisfaisable ;*
2. *Il n'y a pas de phrase θ telle que $\Gamma \models \theta$ et $\Gamma \models\neq \theta$;*
3. *Il existe une phrase ψ telle qu'on n'ait pas $\Gamma \models \psi$.*

4 Méta-théorie

4.1 Correction.

Les systèmes sémantique et déductifs introduits dans les deux précédentes questions ont été construits pour refléter les règles d'argumentation du langage naturel, de deux façons différentes : d'une part le système déductif donne des règles pour passer d'un assortiment de symboles à un autre, sans s'occuper de ce que cela signifie [10] ; d'autre part, le système sémantique traduit les symboles logiques (connecteurs, égalité, quantificateurs) en leur attribuant le sens le plus...sensé.

Etant donné un ensemble de formules Γ, on peut en tirer, d'une part, l'ensemble des formules que l'on peut déduire de Γ dans notre système déductif, noté $\mathrm{Thm}(\Gamma) = \{\phi | \Gamma \vdash \phi\}$; d'autre part, l'ensemble $V = \{\phi | \Gamma \models \phi\}$ des déductions valides dans notre système sémantique.

On s'attend donc à ce que les notions de déductibilité et de validité ne soient pas complètement sans rapport. En premier lieu, on aimerait ne pouvoir prouver que des choses vraies ; c'est ce qu'on appelle la *correction* d'un système logique. Et de fait, on a :

Théorème 45 (Correction). *Pour tout énoncé θ et collection de formules Γ, si $\Gamma \vdash \theta$, alors $\Gamma \models \theta$. Autrement dit, $Thm(\Sigma) \subset V$.*

Preuve. On ne change pas une équipe qui gagne, et donc, on va procéder par récurrence sur le nombre n d'étapes nécessaires à pour établir $\Gamma \vdash \theta$.

Initialisation : Si $n = 1$ alors soit ϕ est un axiome logique, soit la clause utilisée est (As).

Dans le premier cas, on se convainc sans trop de mal de crâne que les axiomes logiques sont valides [11]. Cependant, au bout de quelques pages de logique mathématique, une réaction saine est de considérer avec suspicion toute soit-disant évidence. Vérifions donc que (E2) et ($\forall$E) sont bien valides ; les deux autres axiomes d'égalité et ($\exists$I) sont similaires.

(E2) Soit M une interprétation, s un assignement sur M. On veut montrer que

$$M, s \models [(x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)] \to f^n x_1 \ldots x_n = f^n y_1 \ldots y_n$$

10. En fait, pour utiliser ce système de preuve, il est même plutôt recommandé de ne pas trop se poser de questions !

11. Autrement dit, dans la mise au point de nos systèmes, on n'a pas grossièrement échoué à donner aux symboles le sens que l'on veut qu'ils aient.

Comme dans l'exemple 42, puisqu'il s'agit d'une implication, le cas non-trivial est celui où on suppose que $M, s \models (x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n)$, c'est-à-dire $s(x_1) = s(y_1), \ldots, s(x_n) = s(y_n)$. On veut alors monntrer que $M, s \models f^n x_1 \ldots x_n = f^n y_1 \ldots y_n$, c'est-à-dire, par définition de l'assignement de termes $\bar{s}$, $f^M(\bar{s}(x_1), \ldots, \bar{s}(x_n)) = f^M(\bar{s}(y_1), \ldots, \bar{s}(y_n))$. Puisque f^M est une fonction et $\bar{s}(x_i) = s(x_i) = s(y_i) = \bar{s}(y_i)$, c'est bien le cas.

($\forall$E) Il s'agit cette fois d'établir

$$M, s \models \forall x\ \phi \to \phi(x|t).$$

C'est une implication ; on suppose donc que $M, s \models \forall x\ \phi$; autrement dit, pour tout a dans le domaine de M, $M, s' \models \phi$, où s' coïncide avec s, sauf que $s'(x) = a$. En particulier, pour $a = \bar{s}(t)$, on obtient bien $M, s \models \phi(x|t)$.

Dans le second cas θ est dans Γ, donc toute interprétation qui satisfait chaque membre de Γ satisfait également θ, et on a bien $\Gamma \models \theta$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vérifiée pour tout argument déductible en moins de n étapes, et supposons que $\Gamma \vdash \theta$ ait été établi en n étapes. On distingue les cas selon la dernière clause utilisée. On traite (comme souvent) deux exemples ici, les autres étant similaires.

Si la dernière clause utilisée est ($\wedge$I), alors θ est de la forme $(\phi \wedge \psi)$, et on a $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \vdash \phi$ et $\Gamma_2 \vdash \psi$. Par l'hypothèse de récurrence, $\Gamma_1 \models \phi$ et $\Gamma_2 \models \psi$. Soit M une interprétation satisfaisant tous les membres de Γ, alors en particulier M satisfait tous les membres de Γ_1, donc aussi ϕ et tous les membres de Γ_2, donc aussi ψ. Alors, M satisfait θ.

Si la dernière clause est ($\exists$E), Alors $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \vdash \exists v \phi$ et $\Gamma_2, \phi(v|t) \vdash \theta$. De plus, t n'apparaît pas dans ϕ, θ ou aucun membre de Γ_2. L'hypothèse de récurrence garantit que $\Gamma_1 \models \exists v \theta$ et $\Gamma_2, \phi(v|t) \models \theta$. On veut établir $\Gamma \models \theta$.

On considère donc une interprétation M qui satisfasse tous les membres de $\Gamma = \Gamma_1, \Gamma_2$. Alors pour tout assignement de variables s, $M, s \models \exists v \phi$; cela signifique qu'il existe un assignement s' tel que $M, s' \models \phi$. Introduisons M' identique à M, sauf que t y est interprété par $s'(v)$. Alors $M', s' \models \phi(v|t)$, et $M', s' \models \Gamma_2$ puisque t n'apparaît ni dans ϕ ni dans Γ_2. On a donc $M', s' \models \theta$. Comme t n'apparaît pas dans θ et que M' ne diffère de M que quand à l'interprétation de t, on a $M, s' \models \theta$. Enfin, comme θ est une phrase, l'assignement de variable ne joue aucun rôle, d'où $M \models \theta$.

Les autres cas se traitent de façon analogue. □

Corollaire 46. *Soit Γ une collection de phrases. Si Γ est satisfaisable, alors Γ est cohérent.*

Démonstration. Supposons que Γ soit satisfaisable, alors il existe une interprétation M satisfaisant tous les membres de Γ. Supposons que Γ ne soit pas cohérent. Alors il existe θ telle que $\Gamma \vdash \theta$ et $\Gamma \vdash \neg\theta$. Par le théorème de correction, on a aussi $\Gamma \models \theta$ et $\Gamma \models \neg\theta$, donc $M \models \theta$ et $M \models \neg\theta$, ce qui contredit la clause pour satisfaire une négation. □

4.2 Complétude

On pourrait avoir l'impression que la réciproque de ce corollaire est tout aussi facile à établir ; c'est à dire, que pour tout ensemble d'énoncés qui ne raconte pas n'importe quoi, on peut trouver une interprétation qui les rende vrais. C'est ce que l'on appelle la *complétude* d'un système logique : si $\Gamma \models \phi$ alors $\Gamma \vdash \phi$. Or, en y réfléchissant, ce n'est pas si facile : il se pourrait tout à fait qu'on manque de règles d'inférence pour établir tous les arguments valides [12]. Il s'agit, en fait, de résultats profonds de logique mathématique.

Théorème 47 (Complétude, Gödel). *Soit Γ une collection de phrases. Si Γ est cohérente, alors Γ est satisfaisable.*

12. En fait, c'est justement l'objet des théorèmes d'incomplétude mentionnés en introduction, les armes de destruction massive avec lesquelles Gödel a réduit en cendres les espoirs de Hilbert.

Démonstration. Bien que le théorème soit plus général, on suppose, pour simplifier, que K est dénombrable. Soit Γ une collection cohérente d'énoncés, on cherche à construire une interprétation M qui satisfasse Γ.

Plan d'attaque : On va s'inspirer des interprétations de Henkin de l'exemple 33. On va commencer par étendre le langage en lui ajoutant des constantes qui pourraient manquer, et, dans ce nouveau langage $\mathcal{L}'$, former une famille maximalement cohérente $\Gamma'' \supseteq \Gamma$. Enfin, suivant le modèle des structures de Henkin, on construira une interprétation M du langage étendu telle que $M \models \sigma$ ssi $\sigma \in \Gamma''$.

Extension du langage. Pourquoi étendre le langage $\mathcal{L}$? Tout d'abord, il se pourrait que K ne contienne aucune constante, donc que le domaine d des termes sans variables soit vide. D'autres K pathologiques pourraient ne contenir qu'une seule constante c et un symbole de prédicat unitaire P ; alors $\Gamma = \{\exists x Px, \neg P(c)\}$ est cohérente, mais aucune interprétation de domaine $\{c\}$ ne peur modéliser Γ, et on ne peut pas imiter les structures de Henkin pour conclure.

On étend donc le langage $\mathcal{L}1K =$ en lui adjoignant un nouveau stock dénombrable de constantes $\{c_0, c_1, \ldots\}$ dont aucune n'est dans le langage originel. On appelle $\mathcal{L}'$ le langage du premier ordre ainsi obtenu

Extension de Γ. Puisque le langage d'origine est supposé dénombrable, $\mathcal{L}'$ l'est aussi, on note $\theta_0, \theta_1, \ldots$ une énumération des formules à une variable libre de $\mathcal{L}'$. On forme une suite de collections de phrases $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ comme suit :

$$\Gamma_0 = \Gamma;\ \Gamma_{n+1} = \Gamma_n, (\exists c\theta_n \to \theta_n(x|c_i)),$$

où c_i est la première constante de la liste n'apparaissant ni dans θ_n ni dans aucun membre de Γ_n. L'idée est que, si $\exists x\theta_n$ est vraie, alors c_i est l'un des x qui convient.

On note $\Gamma' = \bigcup_n \Gamma_n$. Montrons que Γ' est cohérent.

Si ce n'est pas le cas, alors un sous-ensemble fini de Γ' est incohérent, et ce sous ensemble fini est contenu dans un Γ_m. Il y a alors un plus petit entier n tel que Γ_n soit cohérent, mais pas Γ_{n+1}.

De la clause ($\neg$E), il découle

$$\Gamma_n \vdash \neg(\exists x\theta_n \to \theta_n(x|c_i)). \tag{2}$$

Dautre part, par *ex falso quodlibet*,

$$\Gamma_n, \exists x\theta_n, \neg(\exists x\theta_n) \vdash \theta_n(x|c_i).$$

Par la clause ($\to$I), il vient alors $\Gamma_n, \neg(\exists x\theta_n) \vdash (\exists x\theta_n \to \theta_n(x|c_i))$. En appliquant ($\neg$I) à ceci et à (2), on a $\Gamma_n \vdash \neg\neg\exists x\theta_n$ et par ($\neg$E),

$$\Gamma_n \vdash \exists x\theta_n. \tag{3}$$

D'autre part, par la clause (As), $\Gamma_n, \theta_n(x|c_i), \exists x\theta_n \vdash \theta_n(x|c_i)$, donc, par ($\to$I), $\Gamma_n, \theta_n(x|c_i) \vdash (\exists x\theta_n) \to \theta_n(x|c_i)$. A nouveau par ($\neg$I), on a donc

$$\Gamma_n \vdash \neg\theta_n(x|c_i). \tag{4}$$

Soit t un terme de $\mathcal{L}'$ n'apparaissant ni dans θ_n, ni dans Γ_n. Alors, en remplaçant c_i par t dans une déduction de (4), on obtient une déduction $\Gamma_n \vdash \neg\theta_n(x|t)$. Alors, par ($\forall$I),

$$\Gamma_n \vdash \forall v\neg\theta_n(x|v) \tag{5}$$

Par (As) on a $\{\forall v\neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \theta_n$, et par ($\forall$E) on a $\{\forall v\neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \neg\theta_n$, donc $\{\forall v\neg\theta_n(x|v), \theta_n\}$ est incohérent. Alors, pour une phrase ϕ quelconque, $\{\forall v\neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \phi$ et $\{\forall v\neg\theta_n(x|v), \theta_n\} \vdash \neg\phi$.

Alors par (3) et en appliquant ($\exists$E), on obtient

$$\begin{cases} \Gamma_n, \forall v \neg \theta_n(x|v) \vdash \phi \\ \Gamma_n, \forall v \neg \theta_n(x|v) \vdash \neg \phi \end{cases}$$

Par la règle de coupure appliquée à (5), on obtient que Γ_n est incohérent, ce qui contredit la définition de n. Γ' est donc bien cohérent.

Construction de l'interprétation. Par le lemme de Lindenbaum, il existe une collection maximalement cohérente de phrases Γ'' contenant Γ', donc Γ. On va construire une interprétation M qui satisfasse Γ''.

- **Domaine :** On considère une énumération $t_0, t_1, \dots$ des termes sans variables de $\mathcal{L}'$ et on pose

  $$d = \{t_i | \forall j < i, t_i = tt_j \notin \Gamma''\}.$$

  Ainsi, le domaine est donné par les termes t_i, en ne gardant qu'un unique exemplaire de ceux que Γ'' déclare égales [13]. C'est en particulier vrai des constantes c_i. Le domaine est construit de sorte que les formules d'égalité dans Γ'' sont automatiquement vérifiées.
- **Constantes :** Soit a une constante du langage étendu. Alors $\exists x x = a$ est dans Γ'' par maximalité (et application de ($\exists$I) à $a = a$). De plus, par construction de Γ', il existe une phrase de la forme $(\exists x x = a \to c_i = a)$ dans Γ'', donc $c_i = a$ est dans Γ''. Comme noté ci-dessus, il existe un unique j tel que $c_j \in d$ et $c_i = c_j$ est dans Γ. On pose alors $a^M = c_j$. En particulier, les constantes qui sont dans d se désignent elles-mêmes.
- **Fonctions :** Pour tout $(t_1, \dots t_n)$ de d^n et symbole de fontion n-aire f, il existe un terme $\tilde{t} \in d$ tel que $\tilde{t} = f t_1 \dots t_n \in \Gamma''$. On pose alors $f^M(t_1, \dots t_n) = \tilde{t}$.
- **Prédicats :** si P est un signe de prédicat d'arité 0 K, on pose $P^M =$ vrai si P est dans Γ'', faux autrement. Si R est un symbole de prédicat à n places, on pose

  $$R^M = \{(t_{i_1}, \dots t_{i_n}) \in d^n | R t_{i_1} \dots t_{i_n} \text{ est dans } \Gamma''\}.$$

Les assignements de variables fonctionnent dans le même esprit : si v est une variable, alors $s(v) = c_i$, où c_i est la première constante de d telle que $c_i = v$ soit dans Γ''. De même pour $\bar{s}(t)$.

L'interprétation M convient. La dernière étape consiste à montrer que pour toute formule θ de $\mathcal{L}'$, $M \models \theta$ ssi θ est dans Γ''. On procède par récurrence sur la complexité de θ :

- **Initialisation :** Le cas des formules atomiques est donné par la définition de M ci-dessus.
- **Hérédité :** Si σ est de la forme $\neg\alpha$, alors par hypothèse de récurrence, $M \models \alpha$ ssi $\alpha \in \Gamma''$. De plus, par maximalité, $\alpha \in \Gamma''$ ssi $\neg\alpha \notin \Gamma''$. Donc, $\sigma \in \Gamma''$ ssi $M \nvDash \alpha$, c'est à dire ssi $M \vDash \sigma$.

  Si σ est de la forme $(\alpha \wedge \beta)$, alors $M \models \sigma$ ssi $M \models \alpha$ et $M \models \beta$, c'est à dire, par hypothèse de récurrence, ssi $\alpha \in \Gamma''$ et $\beta \in \Gamma''$. Mais $\{\alpha \wedge \beta, \neg\alpha\}$ n'est pas cohérent, donc par maximalité de Γ'', si $\sigma \in \Gamma''$ alors $\alpha \in \Gamma''$ et de même, $\beta \in \Gamma''$. Réciproquement, si α et β sont dans Γ'', alors toujours par maximalité, $\sigma \in \Gamma''$. Ainsi, $M \models \sigma$ ssi $\sigma \in \Gamma''$. Les autres connecteurs sont similaires.

  Supposons enfin que σ est de la forme $\forall x \phi$. D'une part, si $\sigma \in \Gamma''$, on veut montrer que $M \models \sigma$, c'est à dire, par définition du domaine, $M \models \phi(x|t)$ pour tout terme $t \in d$. Mais $\forall x \phi \to \phi(x|t)$, donc par maximalité de Γ'', $\phi(x|t) \in \Gamma''$, et par hypothèse de récurrence, ceci entraîne $M \models \phi(x|t)$. Réciproquement, si $\sigma \notin \Gamma''$, alors $\neg\sigma \in \Gamma''$, c'est à dire $\exists x \neg\phi \in \Gamma''$. Mais par construction de Γ'', il existe une constante c_i telle que $\exists x \neg\phi \to \neg\phi(x|c_i) \in \Gamma''$, donc par maximalité, $\neg\phi(x|c_i) \in \Gamma''$. Par hypothèse de récurrence, $M \models \neg\phi(x|c_i)$, donc $M \nvDash \sigma$. L'autre quantificateur se traite de la même façon.

13. Une façon plus "propre" de procéder est de définir une relation d'équivalence sur les termes t par $t \simeq t'$ ssi $t = t' \in \Gamma''$. Il faut alors vérifier que les interprétations des fonctions et prédicats sont bien définis.

Enfin, puisque $\Gamma \subset \Gamma''$, M satisfait chaque membre de Γ. On utilise le théorème de restricion du langage pour conclure. $\square$

On en déduit la complétude de notre système logique :

Corollaire 48. *Pour chaque phrase θ et collection de phrase Γ, si $\Gamma \models \theta$, alors $\Gamma \vdash \theta$.*

Preuve. Supposons que $\Gamma \models \theta$, alors il n'y a pas d'interprétation M satisfaisant tous les membres de Γ mais pas θ. Donc $\Gamma, \neg\theta$ n'est pas satisfaisable, donc incohérent par le théorème de complétude. Ainsi, il existe une phrase ϕ telle que $\Gamma, \neg\theta \vdash \phi$ et $\Gamma, \neg\theta \vdash \neg\phi$. On a donc par la clause ($\neg$I) $\Gamma \vdash \neg\neg\theta$, d'où par ($\neg$E) $\Gamma \vdash \theta$. $\square$

Les théorèmes de correction et de complétude assurent l'équivalence de la déductibilité et de la validité pour les arguments, et de la cohérence avec la satisfaisabilité pour les collections de phrases. On peut ainsi passer des aspects issus de la théorie des modèles à ceux issus de la théorie de la preuve.

Des théorèmes de finitude, de correction et de complétude, on déduit :

Théorème 49 (Compacité). *Une collection de phrase Γ est satisfaisable ssi tout sous-ensemble fini de Γ l'est.*

Preuve. Si M satisfait chaque membre de Γ, alors M satisfait tout sous ensemble fini. Réciproquement, su pposons que M ne soit pas satisfaisable. Alors un certain sous-ensemble fini ne l'est pas : en effet, par complétude, Γ est incohérent, donc un sous-ensemble fini est incohérent par le théorème de finitude, et par le corollaire du théorème de correction, ce sous ensemble n'est pas satisfaisable. $\square$

C'est cette notion de compacité qui va mettre en lumière certaines limites de la logique de premier ordre.

Exemple 50 (Modèles non-standard de l'arithmétique). Comme l'introduction le laisse entendre, une activité très à la mode parmi les mathématiciens du début du 20ème siècle est d'axiomatiser toutes sortes de domaines. Dans le cas de l'arithmétique, on a une interprétation préférée $\mathfrak{N}$ du langage $\mathcal{L}_{NT}$ de la théorie des nombres, et on se demande s'il existe un ensemble d'axiomes qui caractérisent cette interprétation.

En d'autres termes, existe-t-il un ensemble d'énoncés Σ tel que $\mathfrak{N} \models \Sigma$ et si $M \models \Sigma$, alors M est "semblable à" $\mathfrak{N}$? Plus rigoureusement, on demande que M soit *isomorphe* à $\mathfrak{N}$, c'est à dire, qu'il existe une bijection $i : d_M \to d_{\mathfrak{N}}$ telle que

$$\begin{aligned} i(c^M) &= c^{\mathfrak{N}} \text{ pour toute constante } c \\ i(f^M(a_1, \dots, a_n)) &= f^{\mathfrak{N}}(i(a_1), \dots, i(a_n)) \\ (a_1, \dots, a_n) \in R^M &\text{ ssi } (i(a_1), \dots, i(a_n)) \in R^{\mathfrak{N}}. \end{aligned}$$

Hélas, on ne peut trouver de tels axiomes. En effet, si Σ est un candidat, considérons le langage étendu $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{NT} \cup \{c\}$ et la collection d'énoncés

$$\Theta = \Sigma \cup \{0 < c, S0 < c, SS0 < c \dots\}.$$

Montrons que Θ est satisfaisable. Si Θ_0 est un sous-ensemble fini de Θ, alors il existe un n tel que $\Theta_0 \subset \Sigma \cup \{0 < c, S0 < c, SS0 < c \dots, \underbrace{SS\dots S}_{n \text{ fois}} 0 < c\}$. Cet ensemble d'énoncés a un modèle $\mathfrak{N}_n$, dont le domaine est $\mathbb{N}$, les opérations ont leur sens usuel et $c^{\mathfrak{N}_n} = n+1$. Par compacité, Θ a un modèle M', que l'on peut restreindre en une interprétation de $\mathcal{L}_{NT}$ en "oubliant" $c^{M'}$; mais cette interprétation n'est pas isomorphe à $\mathfrak{N}$, puisqu'elle comporte un élément en relation "$<$" avec une infinité d'éléments du domaine, ce qui n'est pas le cas de $\mathfrak{N}$. M est un modèle non-standard de l'arithmétique.

En prenant (n'y allons pas de main morte) $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) = \{\phi \mid \mathfrak{N} \models \phi\}$ (ce que l'on appelle la *théorie* de $\mathfrak{N}$), on obtient néanmoins que $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Autrement dit, le langage $\mathcal{L}_{NT}$ ne peut exprimer d'énoncé vrai dans $\mathfrak{N}$ et faux dans M, ou le contraire. Cela est dû au fait que $\mathcal{L}_{NT}$ n'est pas équipé pour "parler" de l'élément non-standard $c^{M'}$, qui est pourtant bien là !

Exemple 51 (Analyse non-standard). Avant que Cauchy ne tente d'assainir le calcul différentiel et intégral à grand renfort de ε et δ, Newton et Leibniz ne se posaient pas tant de questions et travaillaient avec de mystérieuses quantités "infinitésimales", plus petites que tout réel sans pour autant être tout à fait nulles. Les fantômes de ces quantités hantent les manuels sous forme de dx et de dt privés de leur sens sulfureux.

La rigueur est venue au prix de contorsions et de calculs de limites que d'aucuns, dont A. Robinson, trouvent inconfortables. Il développa donc un cadre logiquement cohérent qui autorise les infinitésimaux. Pour cela, il construisit un langage $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ qui comporte une *constante* $\dot{r}$ pour chaque réel r, un symbole de fonction $\dot{f}$ pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et un n-prédicat $\dot{R}$ pour chaque $n-$relation R sur $\mathbb{R}^n$. Un *gros* langage, donc. Il en construit ensuite une interprétation $\mathfrak{R}$ de domaine $\mathbb{R}$ qui interprète chaque symbole comme le réel/fonction/relation qui lui a donné naissance [14]. On étend alors le langage en $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \cup \{c\}$, et on considère la collection d'énoncés

$$\Theta = \mathrm{Th}(\mathfrak{R}) \cup \{\dot{0}\dot{<}c\} \cup \{c\dot{<}\dot{r} | r \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

Par la compacité, on montre que Θ admet un modèle A, dans lequel c joue le rôle d'un infinitésimal. Le domaine d_A se décompose en trois types d'éléments : des réels standards, qui donnent une copie de $\mathbb{R}$ dans d_A ; des éléments purement non-standard, comme c^A, et des éléments "hybrides" preovenant de l'interprétation de, par exemple $\dot{42}\dot{+}c$. On peut alors faire de l'analyse en utilisant c ; ainsi, par exemple, on peut définir $f'(a)$ comme la partie standard de $\dfrac{f(a+c)-f(a)}{c}$.

Tout ceci peut sembler capillotracté, mais c'est en fait un domaine fructueux, qui a permis de prouver de nouveaux résultats en analyse !

Remarquons qu'avec la supposition faite sur la dénombrabilité de K dans la preuve du théorème, on a obtenu une interprétation finie ou dénombrable, soit :

Corollaire 52 (Löwenheim-Skolen). *Soit Γ un ensemble satisfaisable de phrases de $\mathcal{L}1K =$. Si Γ est fini ou dénombrable, alors Γ admet un modèle dont le domaine est fini ou dénombrable.*

Il y a en fait une version plus forte de ce corollaire.

Définition 53. *Soient $M_1 = \langle d_1, I_1 \rangle$ et $M_2 = \langle d_2, I_2 \rangle$ deux interprétations de $\mathcal{L}1K =$. On dit que M_1 est une* sous-interprétation *de M_2 si $d_1 \subset d_2$ et si*

- $c^{M_1} = c^{M_2}$*pour tout symbole de constante c ;*
- $R^{M_1} = R^{M_2} \cap d_1^n$ *pour tout n-prédicat R ;*
- $f^{M_1} = f^{M_2}_{|d_1^n}$ *pour toute n-fonction f.*

On dit que deux interprétations M_1 et M_2 sont équivalentes *si l'une est une sous-interprétation de l'autre et si pour toute formule θ et tout assignement de variable s, $M_1, s \models \theta$ ssi $M_2, s \models \theta$.*

On a alors :

Théorème 54 (Downward Löwenheim-Skolem). *Soit M une interprétation de $\mathcal{L}1K =$. Soit $d_1 \subset d$ et soit $\kappa = \max(\#K, \#d_1, \aleph_0)$. Alors, il existe un sous-modèle M' de M, équivalent à M et tel que le cardinal du d' de M' soit au plus κ.*

(Idée de) preuve. Cette preuve utilise l'axiome du choix, et lui est en fait équivalent. Soit C une fonction de choix sur $P(d)$, telle que pour tout $e \subset d$, $C(e) \in e$, et $C(\emptyset) = C(d)$.

Soit s un assignement de variable, θ une formule et v une variable. On définit le v-témoin de θ sur s par $w_v(\theta, s) = C(q)$, où

$$q = \{c \in d, \exists s' \text{ coïncidant avec } s \text{ sauf peut-être en } v, \text{ tel que } s'(v) = c \text{ et } M, s' \models \theta\}.$$

14. A ce stade, on a l'impression de tourner en rond, mais patience

En d'autres termes, $M, s \models \exists v\theta$ ssi q est non-vide, et alors $w_v(\theta, s)$ est un élément du domaine qui vérifie $M, s \models \exists v\theta$.

D'autre part, pour $e \subset d$ non-vide, on séfinit son enveloppe de Skolem par

$$sk(e) = e \cup \{w_v(\theta, s), \theta \text{ formule}, v \text{ variable, et } s \text{ assignement à valeurs dans } e\}$$

L'idée est d'ajouter à e suffisamment d'éléments pour rendre toute formule existentielle vraie. On cherche maintenant un ensemble contenant d_1 et coïncidant avec son enveloppe de Skolem.

Pour cela, on définit une suite $e_0, e_1, \dots$ par

$$e_0 = \begin{cases} C(d) \text{ si } K \text{ n'a pas de constante et } d_1 = \emptyset, \\ d_1 \cup (\{c^M, c \text{ constante }\}) \text{ sinon,} \end{cases}$$
$$e_{n+1} = sk(e_n).$$

On note d' l'union des e_n et on restreint l'interprétation à d' pour obtenir M'.

Il s'agit bien d'un sous-modèle dont le domaine inclut d_1. En utilisant le fait qu'il y a au plus κ formules, donc au plus κ témoins à chaque étape, on obtient quee le cardinal de d' est au plus κ. Remarquons qu'on a utilisé le fait qu'une union dénombrable d'ensemble de taille au plus κ est lui même de cardinal au plus κ, ce qui est, encore, une conséquence de l'axiome du choix.

Enfin, on montre, par induction sur la complexité de θ, que M' est équivalent à M. $\square$

Un corollaire de la propriété de compacité est l'opposé du résultat précédent :

Théorème 55 (Upward Löwenheim-Skolem). *Soit Γ un ensemble de formules tel que pour tout n, il y a une interprétation M_n et un assignement s_n tel que d_n a au moins n éléments et M_n, s_n satisfait chaque élément de Γ. Alors pour tout cardinal infini κ, il y a une interprétation M et un assignement s sur M tel que le cardinal de d est au moins κ, et M, s satisfait tout élément de Γ.*

Preuve. On ajoute à K une collection de constantes distinctes $\{c_\alpha, \alpha < \kappa\}$ de taille κ. On note

$$\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg c_\alpha = c_\beta | \alpha \neq \beta\}. \tag{6}$$

Soit Γ'' un sous ensemble fini de Γ', m le nombre de nouvelles constantes apparaissant dans Γ''. Alors on étend M_m à une interprétation M'_m du nouveau langage, en interpétant les nouvelles constantes comme des éléments distincts de d_m. Ainsi, M_m est une restriction de M'_m, et M'_m, s_m satisfait tous les éléments de Γ, ainsi que ceux de Γ''. Par compacité, il y a une interprétation M et un assignement s tel que M, s satisfait tout élément de Γ', et comme Γ' contient tous les $\neg c_\alpha = c_\beta$, le domaine de M doit être de cardinal au moins κ. Alors, la restriction de M à $\mathcal{L}1K =$ satisfait tout élément de Γ. $\square$

On a insi montré que pour tout ensemble d'énoncés satisfaisable Γ, s'il n'y a pas de borne finie à la taille des modèles de Γ, alors il existe des modèles de taille exactement κ pur tout cardinal infini κ. En particulier, pour une interprétation de domaine infini d'un langage donné, il n'y a pas d'ensemble d'axiomes qui caractérise cette interprétation à isomorphisme près comme on a essayé de le faire pour $\mathfrak{N}$ à l'exemple 50 ; les langages de premier ordre, dans ce sens, ne sont pas équipés pour exprimer la notion de dénombrabilité. Pour espérer séparer ces notions, on peut recourir à la logique de seond ordre.

Inversement, si on considère les axiomes de ZFC de la théorie des ensembles, alors on peut démontrer à partir de ces axiomes qu'il existe un ensemble non-dénombrable. Pourtant, d'après le Downward Löwenheim-Skolem, il existe un modèle dénombrable de ces axiomes ! C'est ce que l'on appelle le *paradoxe de Skolem*. Il s'agit, heureusement, d'un paradoxe en apparence seulement, qui provient du fait qu'on utilise ici "dénombrable" dans deux sens différent : le sens usuel, "intuitif", avec lequel on énonce Löwenheim-Skolem, et le sens de "en bijection avec "$\mathbb{N}$" à l'intérieur du modèle non-standard. En d'autres termes, et bien que ce soit contraire à l'intuition, si $\phi(x)$ est une phrase du premier ordre signifiant "x est non dénombrable" on peut bel est bien avoir un modèle M tel que

— M satisfait $\phi(x)$ alors même que l'interprétation x^M est dénombrable ;

— $M \models x \in y$ sans que $x^M \in y^M$.

5 La seule bonne logique ?

Du fait de ses règles simples et intuitives et de ses bonnes propriétés de complétude et de correction, la logique classique a souvent été considérée comme la meilleure pour guider le raisonnement.

On en a cependant vu certaines limites, et d'autres types de logiques ont été défendues, telles que la logique intuitionniste, ou des extensions permettant d'encoder la dénombrabilité. Un mouvement de pluralisme logique défend que plusieurs logiques peuvent, sans contradiction, guider le raisonnement.

Plus en profondeur, la question de savoir comment les notions mathématiques de validité logique, et autres propriétés des langages formels, sont liées aux notions épistémologiques de "raisonnement correct" est une instance du problème plus large de l'application des mathématiques à une réalité non-mathématique.

Un aspect de ce questionnement est le rapport entre langages formels et langages naturels. A ce sujet, plusieurs vues s'affrontent.

— La première (Montague, Lycan) défend que les langages formels possèdent des propriétés de certains fragments du langage naturel. Les phrases déclaratives du langage naturels auraient ainsi une forme logique sous-jacente, montrées par les formules du langage formel. Ainsi, les composantes d'une logique fournissent la structure sous-jacente au raisonnement correct.

— Une autre vue (Frege, Laibniz) soutient qu'en raison de leurs multiples ambiguïtés, les langages naturels devraient être remplacés par les langages formels pour permettre le raisonnement. Dans ce cas, les propriétés de déductibilité et de validité sont des idéalisations du raisonnement correct en langage naturel.

— On peut aussi remarquer que mathématiciens et philosophes raisonnenet en langage naturel et recourent à des formuels du langage formel pour clarifier leur propos, le faisant apparaître comme un ajout au langage naturel. Que disent alors les notions précises de validité du langage formel sur le raisonnement en général ?

— Enfin (Corcoran, Shapiro), le langage formel peut être interprété comme un modèle mathématique du langage naturel : il idéalise certains aspects, en ignore ou en simplifie d'autres. Ainsi, les arguments valides sont des modèles de raisonnement correct.

6 Logiques baroques

Dans ce document, on s'est intéressé à la logique du premier ordre, et, à ce stade, elle semble à la fois

— enfoncer des portes ouvertes

— avoir d'excellentes propriétés : correction, complétude ; et plus philosophiquement, formaliser efficacement le raisonnement rationnel

— poser un certain nombre de paradoxes et limitations.

Ce sont ces paradoxes et limitations qui ont donné lieu à toutes sortes de logiques “alternatives”, visant à y répondre. Mentionnons en deux :

6.1 Logique du second ordre

La *logique du second ordre* généralise celle du premier ordre, en autorisant des énoncés portant non seulement sur les variables x, mais aussi sur les propriétés du premier ordre X. L'application la plus immédiate est de formaliser le principe d'induction en arithmétique : si une propriété est vraie pour 0, et “passe” d'un entier à son successeur, alors elle doit être vraie pour tout entier : en logique du second ordre, où X est une variable parcourant l'ensemble des propriétés, ceci s'écrit

$$\forall X[(X(0) \ \wedge \ \forall y\,(X(y) \rightarrow X(Sy))) \rightarrow \forall x X(x)].$$

Si on ajoute à cet énoncé les axiomes $\forall x\, \neg Sx = 0$ et $\forall x\, \forall y\ (Sx = Sy \to x = y)$, alors cet ensemble d'axiomes caractérise $\mathfrak{N}$, ce qu'on ne pouvait pas faire avec des axiomes du premier ordre.

Un autre exemple est la propriété de complétude de l'ordre sur les réels :

$$\forall X\, [(\exists y\, X(y) \wedge \exists z\, \forall y(X(y) \to y \leq z)) \to \exists z\, \forall y\, (\exists u\, X(u) \wedge y \leq u) \vee z \leq y]$$

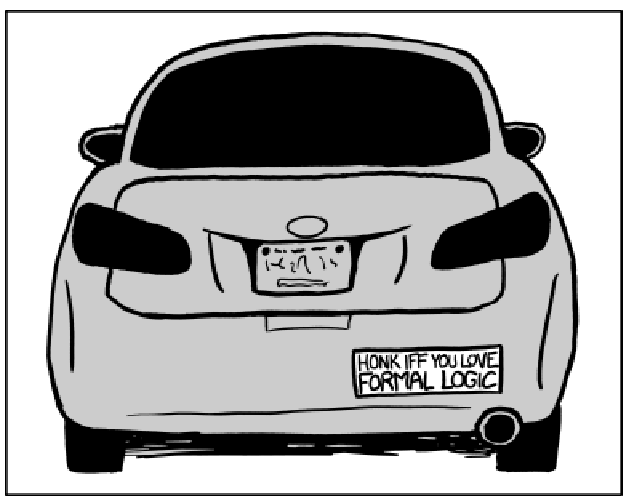
Si l'on ajoute cet énoncé aux axiomes du premier ordre définissant les *corps ordonnés*, alors ceci caractérise les réels dans l'interprétation usuelle, à isomorphisme près.

6.2 Logique intuitionniste

La logique intuitionniste, en gros, rejette la propriété d'élimination des doubles négations ($\neg$E) et surtout le principe du *tiers exclus* $A \vee \neg A$ qui en découle [15]. Il peut sembler absurde, à première vue, de rejeter des règles de raisonnement si évidentes. Ce qui froisse les intuitionnistes, c'est que ces règles autorisent le raisonnement par l'absurde : pour montrer qu'une propriété P est vraie, par élimination des doubles négations, il suffit de montrer qu'elle n'est *pas* pas fausse, ou encore que si elle n'est pas fausse, on a une contradiction.

On peut ainsi montrer que des objets mathématiques existent en montrant qu'on serait bien embêtés, logiquement parlant, s'ils n'existaient pas, ce qui, du point de vue de Brouwer, n'est pas très...constructif [16]. La logique intuitionniste, obtenue en "jetant" toutes les règles de déduction qui pourraient nous amener au maudit tiers exclus, sont à la base des mathématiques dites constructives, dont le slogan est qu'une preuve de l'existence d'un objet doit donner une façon d'obtenir cet objet.

FIGURE 1 – XKCD



15. Mick Jagger est un intuitionniste célèbre : de "I can't get no satisfaction", on ne peut pas déduire qu'il est satisfait.
16. Hilbert, à l'opposé du ring, considérait que "priver le mathématicien du principe du tiers exclus serait comme de priver l'astronome de son télescope, ou le boxeur de ses poings."