

Feuille 2 : Optimisation sous contrainte et extrema liés

1 Extremas liés

Exercice 1 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ sur l'ensemble

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}.$$

Exercice 2 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x + y + z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0 \right\}.$$

Exercice 3 Déterminer les extrema de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto z$ sur l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \text{ et } x + y + z - 1 = 0 \right\}.$$

Exercice 4 On considère la parabole

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = 4y\} = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^2$$

où $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - 4y \in \mathbb{R}$. On note $u_0 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

- Justifier qu'il existe $v_{min} \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P}$ tel que :

$$\forall v \in \overline{B}(u_0, 2) \cap \mathcal{P}, \|u_0 - v_{min}\| \leq \|u_0 - v\|.$$

- Justifier que

$$\forall v \in \mathcal{P}, \|u_0 - v_{min}\| \leq \|u_0 - v\|.$$

- Déterminer v_{min} .

Exercice 5 (Nécessité de l'hypothèse sur la surjectivité de $Dg(a)$) 1. On s'intéresse aux extrema de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto -y \in \mathbb{R} \text{ sur } \mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^3 - x^2 = 0\}$$

Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathcal{F}$, $y \geq 0$ et $y = 0$ ssi $x = 0$. En déduire que $f|_{\mathcal{F}}$ a un maximum global sur \mathcal{F} atteint en un point (x^*, y^*) à déterminer.

- Calculer $\nabla f(x^*, y^*)$ et $\nabla g(x^*, y^*)$. Existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)?$$

Est-ce que ça contredit le théorème des extrema liés ?

- Un autre exemple :** On s'intéresse maintenant aux extrema de

$$\tilde{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 2x^3 - 3x^2 \in \mathbb{R} \text{ sur } \tilde{\mathcal{F}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (3 - x)^3 - y^2 = 0\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

- Montrer que $(3, 0)$ est un maximum global de \tilde{f} sur $\tilde{\mathcal{F}}$.
- Est-ce que ceci contredit le théorème des extrema liés ?

Exercice 6 (Extrema locaux et globaux) 1. On s'intéresse aux extrema de

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \text{ sur } \mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n, 1 - n)$ et $f(1 - n, n)$. En déduire que f n'admet pas d'extremum global sur \mathcal{D} .
3. **Un autre exemple :** On s'intéresse maintenant aux extrema de

$$\tilde{f} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}y^2 + 2x \in \mathbb{R} \text{ sur } \tilde{\mathcal{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$$

Que donne la méthode de Lagrange ?

4. Montrer que, si $t \leq \frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}(1+t)^3 - \frac{3}{2}(1+t)^2 + 2(1+t) \leq \frac{5}{6}$. En déduire que $(1, 1)$ est un maximum local.
5. Montrer que, si $t \geq -\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}(2+t)^3 - \frac{3}{2}(2+t)^2 + 2(2+t) \geq \frac{2}{3}$. En déduire que $(2, 2)$ est un minimum local.
6. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{f}(n, n)$ et $\tilde{f}(-n, -n)$. En déduire que \tilde{f} n'admet pas d'extremum global sur $\tilde{\mathcal{D}}$.

Exercice 7 (Inégalité arithmético-géométrique) 1. Déterminer le maximum de la fonction $f : (x_i)_{1 \leq i \leq n} \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$ sur l'ensemble

$$\mathcal{K} = \left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n; \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

2. En déduire que, pour tout $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Exercice 8 Soit X_1, \dots, X_n un échantillon de moyenne m et de variance σ^2 . On s'intéresse aux estimateurs sans biais de m de la forme

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i, \text{ avec } a_1 + \dots + a_n = 1.$$

1. Calculer la variance de l'estimateur $\sum_{i=1}^n a_i X_i$, en fonction de $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
2. Déterminer $a = (a_1, \dots, a_n)$ pour que l'estimateur ait une variance minimale.

Exercice 9 Etant donné A une matrice symétrique réelle d'ordre $n \geq 1$, on considère le problème

$$\inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x \rangle, \tag{1}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Montrer que le problème (1) admet une solution x^* .
2. Montrer que x^* est un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ^* , minimale parmi toutes les valeurs propres de A .
3. En déduire que A est diagonalisable.