

## Exercices de révision : Rappels de calcul différentiel

### 1 Rappels de calcul différentiel

**Exercice 1**  $E, F$  deux e.v.n. Dans chacun des cas suivants, montrer que  $f$  est différentiable et donner sa différentielle, puis montrer que  $f$  est  $C^1$ .

- ▷  $f : E \rightarrow F$  constante.
- ▷  $f : E \rightarrow F$  linéaire continue.
- ▷  $f : E \times E \rightarrow F$  bilinéaire continue.
- ▷  $f : E \rightarrow F$  quadratique.

En déduire la différentielle de

$$\begin{array}{lll} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto xy & (A, B) \mapsto AB & x \mapsto \|x\|_2^2 \end{array}$$

**Exercice 2** Soit l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré  $\leq n$ , muni de la norme

$$\|\cdot\|_\infty : P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E \mapsto \max_{k=0, \dots, n} |a_k|$$

Montrer que l'application  $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' - P^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  est différentiable sur  $E$  et déterminer sa différentielle.

**Exercice 3** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^1$ . On définit

$$\begin{array}{l} g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(x - y, y - z, z - x) \end{array}$$

1. Justifier que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ .
2. Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

**Exercice 4** On considère les applications

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 & g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x^2 y, xy, xy^3) & (x, y, z) \mapsto (x + y + z, xyz). \end{array}$$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Déterminer la matrice jacobienne de  $f$  en  $(a, b)$ , de  $g$  en  $f(a, b)$  et de  $g \circ f$  en  $(a, b)$ .

**Exercice 5** Soit  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x^2 - y, x^2 + y^2)$  et  $g = f \circ f$ .

1. Justifier que  $f$  et  $g$  sont  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. Calculer  $\text{Jac } f(x, y)$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . En déduire  $\text{Jac } g(0, 0)$ .
3. Montrer qu'il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $(x, y) \in B_f((0, 0), r)$ ,  $\|Dg(x, y)\| \leq \frac{1}{2}$ .
4. Montrer que  $g$  admet un unique point fixe dans  $B_f((0, 0), r)$ .

## 2 Contre-exemples

### Exercice 6 (Fonction non différentiable admettant des dérivées directionnelles)

On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{si } y \neq 0. \end{cases}$$

1. Soit  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $f$  admet une dérivée directionnelle en  $(0, 0)$  dans la direction de  $v$ .
2. Supposons  $f$  différentiable en  $(0, 0)$ . Donner sa matrice jacobienne en  $(0, 0)$ , puis calculer  $Df(0, 0)(1, 1)$  de deux manères différentes. Que peut-on en déduire ?

### Exercice 7 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas des dérivées dans toutes les directions)

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$ .
2. Montrer que  $f$  n'admet pas de dérivée directionnelle en  $(0, 0)$  dans la direction de  $(1, 1)$ .

### Exercice 8 (Fonction différentiable dont les dérivées partielles ne sont pas continues)

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Justifier que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2. Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ , de différentielle nulle. En déduire  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
3. Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .
4. Montrer que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ne sont pas continues de  $(0, 0)$ .

### Exercice 9 (Fonction admettant des dérivées partielles, mais pas différentiable)

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles en  $(0, 0)$ .
2. Si  $f$  était différentiable, quelle serait sa différentielle ?
3. Montrer que  $f$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .