Coefficients binomiaux, binôme de Newton et triangle de Pascal

September 27, 2017

...ou comment ne pas avoir à développer des pelletées de parenthèses pour calculer $(a+b)^n$.

1 Les coefficients binomiaux.

Définition. *Soit n un entier. On appelle n* factorielle*, noté $n!$, le nombre $n! = n(n-1)(n-2)...*2*1$.*

Exemple: $3! = 3*2*1 = 6$.

Définition. *Soit n un entier, et soit k un entier compris entre 0 et n. On appelle coefficients binomiaux les nombres*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{1}$$

que l'on prononce "k parmi n".

Très utilisés en probabilités, les coefficients binomiaux servent à compter le nombre de façon de choisir k objets parmi n (d'où leur nom !). Ainsi, il y a $\binom{3}{2}$ façons de choisir 2 cookies parmi les trois restants à la boulangerie.

Exemple : Calculons "2 parmi 6".

$$\binom{2}{6} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6*5*4*3*2*1}{(2*1)*(4*3*2*1)} = \frac{6*5}{2*1} = 15. \tag{2}$$

Exercice : Calculer $\binom{6}{k}$ pour k allant de 0 à 6.

Il est laborieux de calculer les factorielles dès que les nombres sont un peu grands (10! est déjà assez pénible !), d'où l'intérêt d'avoir une méthode pour les calculer "de proche en proche". Ça tombe bien, ça existe: c'est le *triangle de Pascal.* Il repose sur le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit n un entier non nul, et soit k un entier compris entre 1 et n. On a alors:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{3}$$

Preuve On part du membre de droite. On a par définition

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}.\end{aligned}$$

On met sur le même dénominateur. Il s'agit de multiplier la première fraction par k au numérateur et au dénominateur, car $k! = k*(k-1)!$ et par $(n-k)$ la seconde, puisque $(n-k)! = (n-k)*(n-k-1)!$. On a alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{k*(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)*(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n*(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k},\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

La façon la plus pratique d'utiliser cette formule est sous forme de tableau, le fameux triangle. On met les n en ligne, les k en colonne, et le nombre situé à la $k-$ième colonne de la $n-$ième ligne est $\binom{n}{k}$.

n \ k	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	

On calcule ainsi un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ en additionnant le coefficient juste au dessus de lui, qui est égal à $\binom{n-1}{k}$, avec le coefficient au-dessus à gauche $\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice: Calculer les $\binom{6}{k}$ avec cette méthode. Plus rapide, non ?

Mais quel rapport avec $(a+b)^n$?

Exercice: Calculer la somme des coefficients d'une même ligne. Que remarque-t-on ?

2 Le binôme de Newton

.

La formule à retenir est la suivante:

Proposition 2. *Soient a, b deux réels, n un entier positif. On a:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n} b^n.$$

Comment retenir une chose pareille ? On voit que l'exposant de a diminue, de n à 0, tandis que l'exposant de b augmente de 0 à n (compte tenu du fait que $a^0 = b^0 = 1$). La somme des exposants de a et b fait toujours n. Une fois les puissances écrites dans cet ordre, il suffit alors d'ajouter les coefficients en utilisant le triangle de Pascal.

Exemple: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exercice: Ecrire la formule pour $n = 2$ et $n = 3$. Retrouve-t-on les formules du TD1 ? Calculer $(x+1)^5$, $(x+3)^4$.