Théorèmes de masse positive

Caroline Vernier

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Qu'est-ce que la masse ?

- En relativité générale

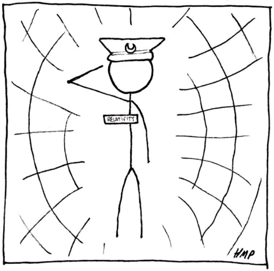
Qu'est-ce que la masse ?

- En relativité générale
- En géométrie riemannienne

Qu'est-ce que la masse ?

- En relativité générale
- En géométrie riemannienne
- Conjecture et théorèmes de la masse positive

Rudiments de relativité générale



General Relativity

La théorie de la relativité générale d'Einstein décrit l'espace temps comme une *variété* M de dimension 4 munie d'une *métrique lorentzienne* γ.

Les équations d'Einstein

On s'intéresse aux variétés lorentziennes $(M^4; \gamma)$ vérifiant les *équations d'Einstein* :

$$\mathrm{Ric}(\gamma) - \frac{1}{2}\mathrm{Scal}(\gamma) \cdot \gamma = 8\pi T.$$

Terme de gauche : Si on écrit γ sous forme matricielle :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{13} & \gamma_{23} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{14} & \gamma_{24} & \gamma_{34} & \gamma_{44} \end{pmatrix} \text{ alors } \mathrm{Ric} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{12} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{34} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{pmatrix}$$

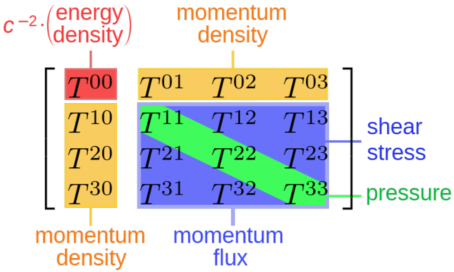
où les r_{ij} dépendent de $\partial^2\gamma_{ij}$. De plus, $\mathrm{Scal} = \mathrm{Tr}(\gamma^{-1}\mathrm{Ric})$.

Les équations d'Einstein

On s'intéresse aux variétés lorentziennes $(M^4; \gamma)$ vérifiant les *équations d'Einstein* :

$$\mathrm{Ric}(\gamma) - \frac{1}{2}\mathrm{Scal}(\gamma) \cdot \gamma = 8\pi T.$$

Terme de droite : T est la *matrice d'énergie-impulsion*. Il décrit la densité de matière/énergie par unité de volume.



Exemples

Un exemple "trivial" est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \gamma_0)$, avec

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples

Un exemple "trivial" est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \gamma_0)$, avec

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Exemples

Un exemple "trivial" est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \gamma_0)$, avec

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \text{eucl.}$$

Exemples

Un exemple "trivial" est l'espace-temps de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \gamma_0)$, avec

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt^2 + \text{eucl.}$$

C'est le cadre de la relativité restreinte.

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*.

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*.
À l'infini, leur comportement se rapproche de l'espace-temps de Minkowski.

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*. À l'infini, leur comportement se rapproche de l'espace-temps de Minkowski.

Exemple

La métrique de Schwarzschild sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, r_0))$ est donnée par :

$$\gamma_S = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2}\, dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl.}$$

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*. À l'infini, leur comportement se rapproche de l'espace-temps de Minkowski.

Exemple

La métrique de Schwarzschild sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, r_0))$ est donnée par :

$$\gamma_S = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl.}$$

Remarques :

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*. À l'infini, leur comportement se rapproche de l'espace-temps de Minkowski.

Exemple

La métrique de Schwarzschild sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, r_0))$ est donnée par :

$$\gamma_S = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2}\, dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl.}$$

Remarques :

1. La masse de l'étoile est donnée par m

Le bon contexte pour définir la masse est celui des *systèmes isolés*. À l'infini, leur comportement se rapproche de l'espace-temps de Minkowski.

Exemple

La métrique de Schwarzschild sur $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 \setminus B(0, r_0))$ est donnée par :

$$\gamma_S = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{eucl.}$$

Remarques :

1. La masse de l'étoile est donnée par m
2. Lorsque $r \to \infty$, γ_S tend vers la métrique de Minkowski $\gamma_0 = -dt^2 + \text{eucl}$

Comment étudier mathématiquement la notion de masse ?

Comment étudier mathématiquement la notion de masse ?

- On se place dans le cadre de la géométrie riemannienne

Comment étudier mathématiquement la notion de masse ?

- On se place dans le cadre de la géométrie riemannienne
- Comment définir les systèmes isolés ?

Comment étudier mathématiquement la notion de masse ?

- On se place dans le cadre de la géométrie riemannienne
- Comment définir les systèmes isolés ?
- Comment définir la masse ?

Variétés asymptotiquement euclidiennes

Définition

Une variété riemannienne (M^n, g) est dite Asymptotiquement Euclidienne (ou AE) d'ordre $\tau > 0$ s'il existe un compact $K \subset M$ et un système de coordonnées $\underline{x} : M \setminus K \to \mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$ dans lequel

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \mathcal{O}(|\underline{x}|^{-\tau}), \\ \partial g_{ij} &= \mathcal{O}(|\underline{x}|^{-\tau-1}), \\ \partial^2 g_{ij} &= \mathcal{O}(|\underline{x}|^{-\tau-2}), \end{aligned}$$

où (g_{ij}) est la matrice du produit scalaire g dans ce système de coordonnées.

Masse d'une variété AE

Masse ADM [Arnowitt, Deser, Misner]

Soit (M, g) une variété asymptotiquement euclidienne, munie d'un système de coordonnées à l'infini $\underline{x}$. On pose

$$m(M, g, \underline{x}) = \lim_{R \to \infty} c_n \int_{S^{n-1}(R)} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \frac{x_j}{R} \, d\mathrm{vol}_{S^{n-1}(R)}.$$

Ici, c_n est une constante qui ne dépend que de la dimension.

Masse d'une variété AE

Masse ADM [Arnowitt, Deser, Misner]

Soit (M, g) une variété asymptotiquement euclidienne, munie d'un système de coordonnées à l'infini $\underline{x}$. On pose

$$m(M, g, \underline{x}) = \lim_{R\to\infty} c_n \int_{S^{n-1}(R)} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \, \frac{x_j}{R} \, d\mathrm{vol}_{S^{n-1}(R)}.$$

Ici, c_n est une constante qui ne dépend que de la dimension.

Question

Pourquoi tant de haine ?

Masse d'une variété AE

Masse ADM [Arnowitt, Deser, Misner]

Soit (M, g) une variété asymptotiquement euclidienne, munie d'un système de coordonnées à l'infini $\underline{x}$. On pose

$$m(M, g, \underline{x}) = \lim_{R \to \infty} c_n \int_{S^{n-1}(R)} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \, \frac{x_j}{R} \, d\mathrm{vol}_{S^{n-1}(R)}.$$

Ici, c_n est une constante qui ne dépend que de la dimension.

Question

Pourquoi tant de haine ?

- Quel rapport avec la masse ?

Masse d'une variété AE

Masse ADM [Arnowitt, Deser, Misner]

Soit (M, g) une variété asymptotiquement euclidienne, munie d'un système de coordonnées à l'infini $\underline{x}$. On pose

$$m(M, g, \underline{x}) = \lim_{R \to \infty} c_n \int_{S^{n-1}(R)} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \frac{x_j}{R} \, d\mathrm{vol}_{S^{n-1}(R)}.$$

Ici, c_n est une constante qui ne dépend que de la dimension.

Question

Pourquoi tant de haine ?

- Quel rapport avec la masse ?
- Dépend des coordonnées ? Quantité finie ?

Théorèmes de Bartnik

Théorèmes de Bartnik

Théorème

Soient $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux systèmes de coordonnées à l'infini sur une variété AE. Alors il existe $O \in O(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\underline{x} = O\underline{y} + v + \mathcal{O}(|\underline{x}|^{1-\tau'}),$$

pour tout $\tau' < \tau$.

Théorèmes de Bartnik

Théorème

Soient $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux systèmes de coordonnées à l'infini sur une variété AE. Alors il existe $O \in O(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\underline{x} = O\underline{y} + v + \mathcal{O}(|\underline{x}|^{1-\tau'}),$$

pour tout $\tau' < \tau$.

Théorème

Si (M, g) est AE d'ordre $\tau > \frac{n-2}{2}$ et si $Scal(g)$ est intégrable, alors la masse de (M, g) est bien définie et ne dépend pas du choix du système de coordonnées.

Conjecture de la masse positive

Conjecture

Si (M^n, g) est une variété AE de dimension $n \geq 3$, dont la masse est bien définie, et *telle que* $Scal(g) \geq 0$, alors $m(M, g) \geq 0$. De plus, $m(M, g) = 0$ ssi (M, g) est isométrique à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \mathrm{eucl})$.

Théorèmes de masse positive

Théorème

La conjecture de la masse positive est vraie dans les cas suivants :

Théorèmes de masse positive

Théorème

La conjecture de la masse positive est vraie dans les cas suivants :

- *(Schoen, Yau, 1978) Lorsque* $3 \leq dim(M) \leq 7$.

Théorèmes de masse positive

Théorème

La conjecture de la masse positive est vraie dans les cas suivants :

- *(Schoen, Yau, 1978) Lorsque* $3 \leq dim(M) \leq 7$.
- *(Witten, 1981) Lorsque* M *est spin.*

Théorèmes de masse positive

Théorème

La conjecture de la masse positive est vraie dans les cas suivants :

- *(Schoen, Yau, 1978) Lorsque* $3 \leq dim(M) \leq 7$.
- *(Witten, 1981) Lorsque M est spin.*
- *(Hein, Lebrun, 2015) Lorsque M est kählérienne.*

Applications de la masse en géométrie conforme.

Problème de Yamabe :

Soit (M, g) compacte de dimension $n \geq 3$. Existe-t-il une fonction strictement positive ϕ telle que $\tilde{g} := \phi^2 g$ soit à courbure scalaire constante ?

Applications de la masse en géométrie conforme.

Problème de Yamabe :

Soit (M, g) compacte de dimension $n \geq 3$. Existe-t-il une fonction strictement positive ϕ telle que $\tilde{g} := \phi^2 g$ soit à courbure scalaire constante ?

Le problème de Yamabe se ramène à étudier les points critiques d'une fonctionnelle. Le minimum de cette fonctionnelle est un invariant conforme, *l'invariant de Yamabe* $\Lambda(M, [g])$. Une étape-clé consiste à comparer $\Lambda(M, g)$ avec $\Lambda(S^n, h)$.

Applications de la masse en géométrie conforme.

Problème de Yamabe :

Soit (M, g) compacte de dimension $n \geq 3$. Existe-t-il une fonction strictement positive ϕ telle que $\tilde{g} := \phi^2 g$ soit à courbure scalaire constante ?

Le problème de Yamabe se ramène à étudier les points critiques d'une fonctionnelle. Le minimum de cette fonctionnelle est un invariant conforme, *l'invariant de Yamabe* $\Lambda(M, [g])$. Une étape-clé consiste à comparer $\Lambda(M, g)$ avec $\Lambda(S^n, h)$. Or

$$\Lambda(M, g) - \Lambda(S^n, h) \geq C\, m(\hat{M}, \hat{g}).$$

Merci de votre attention !